解析学 IV 小テスト No. 5

1997 年 5 月 19 日
河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

自分のノートを参照してよい.（ただし，本は見ないこと.）

[1] 次の 4 条件すべてを満たす $\mathbf{R}$ の部分集合 A の例を一つ挙げよ.
(1) A は Lebesgue 可測である.
(2) $\mu(A)=0$. (μは Lebesgue 測度を表す．)
(3) A は $\mathbf{R}$ で稠密である.
(4) A の濃度は連続濃度である.

[2] $X_n=\{0,1\}$, $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$とおく．$a_1,a_2,\ldots,a_k\in\{0,1\}$ に対し，$\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_k\}\times\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$の形の集合がすべて開集合になるようなもっとも弱い位相を Xに入れる．この Xが，5/12 の授業で定義した Cantor 集合 C(閉区間 $[0,1]$ から始めて次々真ん中 1/3 の開区間を抜いていったもの) を $\mathbf{R}$ の部分空間と思ったものと位相同型であることを示せ．(つまり，Cから Xへの全単射 fで，fも f^{-1}も連続であるものが存在することを示せ．)

[3] 実数の parameter t に依存する $\mathbf{R}$ 上の実数値関数の族 $f_t(x)$ があって，すべての $t\in\mathbf{R}$ に対し $f_t(x)$ は Lebesgue 可測であるとする．すべての $x\in\mathbf{R}$ において，$t\to 0$ のとき $\lim_{t\to 0} f_t(x)$ が存在するとし，それを $f(x)$ とおく．このとき $f(x)$ も Lebesgue 可測であることを示せ.

[4] $X=(0,1]$ とし，$n\geq 1$ を自然数とする．$\mathcal{B}$を，X上の完全加法族で $A_1=(0,1/n]$, $A_2=(1/n,2/n]$, ... ,$A_n=((n-1)/n,1]$ を含むような最小のものとする．$\mu(A_1)=\mu(A_2)=\cdots=\mu(A_n)=1/n$ によって $\mathcal{B}$上の測度μが一意的に定まり，このとき X 上の実数値可測関数全体は $\mathbf{R}$-vector space をなす．(ここまでは証明しなくてよい．) このときこの vector space の次元を求めよ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.