解析学 IV 小テスト No. 2

1997 年 4 月 21 日
河東泰之

自分のノートを参照してよい．(ただし，本は見ないこと．)

[1] Xを任意の集合とする．Xの部分集合 A で，次の条件を満たすもの全体を $\mathcal{F}$とする．
「A または，A^cが有限集合である」
このとき，$\mathcal{F}$は X上の有限加法族であるか．理由をつけて述べよ．

[2] $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．X上の有限加法族 $\mathcal{F}$全体の中で，$\{1\}$, $\{2\}$ をともに含むもののうち，最小なものを求めよ．ただし「最小」とは，Xの部分集合の集合としての包含関係について言っている．

[3] 実数の集合 $\mathbf{R}$ の部分集合で，$A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$, (disjoint union) の形のもの全体のなす有限加法族を $\mathcal{F}$とする．($n = 0$ のときは，$A = \emptyset$と解釈する．講義でやったように，$b_j = \infty$ のときは，$(a_j, \infty] = (a_j, \infty)$ と解釈する．) この形の A に対し，

$$m(A) = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$$

と定義すると，この m は，$\mathcal{F}$上の完全加法的測度になることを示せ．

[4] $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ のとき}, \\ 0, & x \le 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

と定める．
上の [3] で定義された $\mathcal{F}$上で，[3] の問題文中の形の A について，

$$m(A) = \sum_{j=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j))$$

と定める．上の $f(x)$ は，単調増加だが，右連続ではないので，講義で今日やった定理により，この m は，有限加法的測度だが，$\mathcal{F}$上完全加法的ではない．この,「完全加法的ではない」ということを直接示せ．すなわち，互いに disjoint な $\{A_n\}_{n=1,2,3,\ldots} \subset \mathcal{F}$で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \neq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ となるものを具体的に挙げよ，

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．