

数理科学 IV 期末テスト

2005 年 7 月 25 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

このテストは、ノート、本、コピーなどすべて持ち込み可で行います。途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。(多少欄外にはみ出してもかまいません。)

[1] 次の行列のそれぞれについて Jordan 標準形と最小多項式を求めよ。(Jordan 標準形に変換する行列を求める必要はない。)

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -15 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列  $A$  に対し、 $P^{-1}AP$  が Jordan 標準形になるような可逆行列  $P$  を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -5 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] 次の行列  $A$  と実数  $t$  に対し、 $\exp(tA)$  を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

[4]  $A$  は実数を成分とする  $3 \times 3$  行列で、そのすべての固有値は実数であり、また  $A$  の最小多項式は 2 次式であるとする。このとき、 $\exp A$  の最小多項式としてありうるのは何次式か。理由をつけて答えよ。

[5]  $t$  を複素数のパラメータとし、次の行列  $A$  を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

このとき、

$$V = \{p(A) \mid p(x) \text{ は複素数を係数とする任意の多項式}\}$$

とおくと、この  $V$  は複素数を係数とするベクトル空間であるが、その次元を求めよ。