# 作用環論専門家のための3次元トポロジー入門

河東泰之 (東大・数理)

## 1　初めに

1984年のJonesによる，結び目の不変量Jones多項式の発見 [2] 以来，作用素環論と3次元トポロジーの関係が深まっている．しかし，通常の解析寄りの大学（院）教育を受けた場合，この種の理論に関連した3次元トポロジーは習わないのが普通である．一方，ここに現れる3次元トポロジーの理論は，証明を無視すれば，ステートメントを述べたり理解したりするのは，極端にやさしくほとんど何の予備知識も必要としない.（中学生でも解ると言っていよいであろう.）そこでこの講演の目的は，この種のトポロジーのやさしい説明を行い，作用素環側で何をすればさまざまな位相不変量を作れたことになるのかを解説することである.「作用環論専門家のための」という，まくらことばは,「トポロジーの専門家でない人のための」という意味である.

## 2　Jones 多項式 —Kauffman 方式—

Jones多項式とは，knotに対し，(Laurent) 多項式をその不変量として対応させる仕組みである．これは非常に有名なものであるが，まず基礎として一通り解説する．

基本はknotを平面上の絵として表示することである．すると，同じknotが違う絵で表されることが当然起こる．これがどのような場合に起こるかは昔から，Reidemeisterの定理として知られている．これは，同じknotの絵は3種類のReidemeister moveと呼ばれる図形の変形法の組み合わせで移りあえる，というものである．そこで，平面上のknotの絵に多項式を対応させる規則を決め，その対応がこの3種類のReidemeister moveで不変ならばよい．これがKauffman [3] が，Jones多項式の発見後に気付いたことで，もとのJonesのやり方より簡単にできる．この方法で得られる多項式は,（Jones多項式と本質的に同じものだが）Kauffman bracketと呼ばれる．

## 3　Jones 多項式 —元祖 Jones 式—

上の方法はあまり，作用素環と近いように見えない．そこで,（少しは）作用素環に近い方法としてもともとのJonesの方法 [2] をあげる．

今度は，knotはbraidというもののclosureとして表す．今度も同じknotを違うふうに表す表し方があるが，それは今度は2種類のMarkov moveというものの繰返しで移りあえることがMarkovによって知られている．そこで，braidに多項式を対応させる規則を作り，それがMarkov moveで不変であればよい．それにはHecke algebra上の汎関数を考えればよく，Markov moveで不変という条件の一つはtrace

条件になり，もう一つは Markov 条件と呼ばれるものになる．元々は，Jones は自分の作用素環の研究から，この Markov 条件を満たす trace を見出したのであった．

## 4 Surgery による，3 次元多様体の topological invariant

今度は，3 次元多様体に対する複素数値の不変量を考える．また，3 次元多様体を何らかの方法で具体的に表示するのだが，それに knot を使う．すなわち任意の closed 3 次元多様体は knot から surgery と呼ばれる方法で作れるのである．今度もまた，違う knot から同じ多様体が生じることがあるのだが，そのときの knot は互いに Kirby move というもので移りあえることがわかっている．そこで，今度も Kirby move で不変なような knot の複素数値不変量を見つければよい．それには Jones 多項式の変数に 1 のべき根を代入し，かつ，cabling と呼ばれる方法を実行すればよい．これが，Reshetikhin-Turaev [4] による方法であり，同時期に Witten が物理的に考えていたことを数学的に厳密な形で実現するからくりになっている．これは，今 Jones 多項式から作ったが，さまざまな形（たとえば量子群から来る場合）に一般化されている．

## 5 Triangulation による，3 次元多様体の topological invariant

今度は違う方法で topological invariant を作る．見掛け上，上のものと全然違うように見えるかもしれないが，実は密接に関係していることがわかっている．また，こちらの方法の方が作用素環と相性がよい．

今度は，closed 3 次元多様体を triangulation に基づいて作る．つまり，4 面体が有限個貼りあわされて多様体ができていると思う．またしても，同じ多様体が違う貼りあわせでできることがあるが，そのときの貼りあわせ方は，Alexander move というもので移りあえることがわかっている．Alexander move は無限種類あるので，実際はさらに簡単化して 3 つにしたものを使う．そこで今度も，4 面体の有限個の貼りあわせに対し複素数を割り当てて，その規則が Alexander move で不変になるようにすればよい．それには，各 4 面体の辺に，ある有限個の数を割り振り，それに応じて各 4 面体に数を対応させ，さらにその数をかけたり足したりする，ということをする．この各 4 面体に数を対応させる規則がある種の条件を満たしていれば，この最後に出てくる数が，位相不変量になるのである．この，数の対応規則が実は作用素環（あるいは量子群，Wess-Zumino-Witten model）から生じることがわかっている．

この方法は Turaev-Viro [5] によるもので，やはり様々な一般化がなされている．上の Reshetikhin-Turaev の不変量の絶対値の 2 乗が，この Turaev-Viro の不変量になるということが Turaev によって示されている．作用素環を用いた一般化は Ocneanu によって得られている．

## 6 Topological quantum field theory

上では，単に closed な多様体に対して数を対応させたが，もっと一般に境界がある場合も扱える．その場合は，ある種の公理を満たす fucntor を考え，topological quantum field theory と呼ばれる．Atiyah の公理化があり，また Witten は，物理的にその実

現について考えた．上の二つの方法は，いずれも topological quantum field theory の構成に一般化でき，作用素環との関係がつく．くわしくは，本 [1] に書いてある．

## References


[1] Evans, D. E. and Kawahigashi, Y. (to appear). Quantum symmetries on operator algebras. (book manuscript).

[2] Jones, V. F. R. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**, 103–112.

[3] Kauffman, L. (1987). State models and the Jones polynomial. *Topology*, **26**, 395–407.

[4] Reshetikhin, N. Yu. and Turaev, V. G. (1991). Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, **103**, 547–598.

[5] Turaev, V. G. and Viro, O. Y. (1992). State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols. *Topology*, **31**, 865–902.