1999 年度 3 年生解析学 VI 期末テスト・略解・解説

2000 年 2 月 10 日
河東泰之
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

1 番の配点は，正解で 0 点，不正解で -20 点です．その後の問題は各 30 点の 150 点満点です．最高点は 125 点で得点分布は次のとおりでした．

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
6(人)	3	6	5	5	2	1	0	2

平均点は 46.7 点でした．30 点未満が D(6 人)，30 点〜44 点が C(6 人)，45〜64 点が B(9 人)，65 点以上が A(9 人) です．点数の横に赤字で書いてあるのがこの授業の成績です．ただし，2 人については演習の小テストの成績が特に良かったので D→B, B→A というアップをしています．この人たちの成績には赤字に丸印がついています．また演習の成績はその横に青字で書いてあります．一度も小テストを受けていない人には「未受験」の「未」が書いてあります．2 人について，期末テストの成績が前に予告した小テストの通算成績より特に良かったので，その分のアップがついています．この人たちの成績には同様に青字に丸印がついています．その他の人の演習の成績は小テストの通算成績から変わっていません．ただし実際に成績表につく成績は，この成績と大島先生のほうの演習の成績との良い方です．

以下各問題について簡単に解説します．

[1] これは予想以上に悪いできでした．できなかった人は必ずきちんと確認しておいてください．不等号を逆向きに書いた人は -20 点,「正値」というのを忘れた人は -10 点です．(不等号の向きに不安があれば，例を考えてみればすぐにわかるでしょう．)

[2] ずるくやれば，$-2\pi i\chi_{[0,\infty)}(\xi)e^{-\xi}$ を逆 Fourier 変換すれば問題の関数になるので，これが答えです．あとは，超関数を使う，留数を直接計算する，などの方法でももちろんできます．留数の方は，問題の関数が L^1 ではなく L^2 なだけなので，なぜ積分路を大きくした極限として求められるのか，説明が必要です．

[3] $f(kx)$ の Fourier 係数を b_n とおいて定義どおりやれば,

$$b_n = \begin{cases} a_{n/k}, & n \text{ が } k \text{ の倍数の時,} \\ 0, & \text{それ以外の時,} \end{cases}$$

になります．$f(x)$ の Fourier 級数展開の式でいきなり x に kx を代入する方がさらに簡単ですが，収束の意味 (L^2-収束) についてきちんと説明して理由を書く必要があります．

[4] これはよくできてました．まじめに順番にやれば簡単です.

[5] これは Poisson の和公式の証明と同様にやればできます．答えは $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\delta_n$ です．収束のことを考えずに形式的にやっても正しい答えは出ますが，説明が不十分なら減点です.

[6] これはちゃんとできていた人は一人もいませんでした．$(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}*\hat{g}(\xi)|^2$ が可積分であることを示すことになりますが，s だけで決まる定数 C があって，

$$(1+|\xi|^2)^s \le C((1+|\xi-\eta|^2)^s+(1+|\eta|^2)^s)$$

と評価できることを使えば，あとは $g\in H^s(\mathbf{R})$ なので Young の不等式の証明と同様にしてできます.