2019 年解析学特別演習 III テスト (2) 解答解説

2019 年 11 月 20 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 25 点で，平均点は 64.6 点，最高点は 100 点 (4 人) でした．

[1] $\dfrac{\sin x}{x}$ の Fourier 変換が $\pi\chi_{[-1,1]}(\xi)$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換が $\pi e^{-|\xi|}$ なので，Plancherel の定理により，問題の積分の値は

$$\frac{\pi^2}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-|\xi|}\,d\xi = \pi\int_0^1 e^{-\xi}\,d\xi = \pi(1-e^{-1})$$

となります．

[2] $\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換が $\dfrac{2\sin\xi}{\xi}$, $\chi_{[-2,2]}(x)$ の Fourier 変換が $\dfrac{2\sin 2\xi}{\xi}$ なので，$\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-2,2]}(x)$ の Fourier 変換が $\dfrac{4\sin 2\xi\sin\xi}{\xi^2}$ となります．これは L^1 関数なので，この Fourier 逆変換が $\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-2,2]}(x)$ にほとんどいたるところ一致します．x と ξ を入れ替えて，$\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$ の Fourier 変換が $\dfrac{\pi}{2}\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-2,2]}(\xi)$ にほとんどいたるところ一致します．これを計算すると，

$$\begin{cases} 0, & |\xi|\ge 3, \\ \dfrac{\pi}{2}(\xi+3), & -3\le\xi\le -1, \\ \pi & -1\le\xi\le 1, \\ \dfrac{-\pi}{2}(\xi-3), & 1\le\xi\le 3, \end{cases}$$

となります．これは連続関数であり，また $\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$ は可積分関数なので，その Fourier 変換も連続関数となります．よって「ほとんどいたるところ一致」から「すべての点で一致」が従うので，上の式が答えです．

[3] $\mathbb{R}$ 上の急減少関数の列 $\{g_n\}_n$ で，$\|g-g_n\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ となるものを取ります．このとき，$\|f*g-f*g_n\|_2\le\|f\|_1\|g-g_n\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ です．よって，Plancherel の定理より，$\|\widehat{f*g}-\widehat{f*g_n}\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ ですが，$f, g_n\in L^1(\mathbb{R})$ なので，$\widehat{f*g_n}=\hat f\cdot\hat g_n$ です．やはり Plancherel の定理により，$\|\hat g-\hat g_n\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ であり，$\|\hat f\|_\infty<\infty$ なので，$\|\hat f\cdot\hat g-\hat f\cdot\hat g_n\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ です．これにより，$\widehat{f*g}$ と $\hat f\cdot\hat g$ とが L^2 関数として一致し，結論を得ます．

[4]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \le 0, x \ge 1 \end{cases}$$

とおきます．これが可積分であることは簡単にわかります．$x < 0$ のときは $f*f(x) = 0$ であることがすぐにわかります．一方 $0 < x < 1$ のときは，

$$f * f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \int_{-x/2}^{x/2} \frac{dt}{\sqrt{x^2/4 - t^2}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\cos\theta \frac{2d\theta}{x\cos\theta} = \pi$$

となります．よって $f * f$ とほとんどいたるところ一致する連続関数を取ることはできません．