2019年解析学特別演習IIIテスト(1)解答解説

2019年10月16日
河東泰之(かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室(電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問25点で，平均点は27.8点，最高点は100点(1人)でした．

[1] 授業でやった通り，$\chi_{[-1,1]}$ の Fourier 変換が $\dfrac{2\sin\xi}{\xi}$ なので，$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$ の Fourier 変換が $\dfrac{4\sin^2\xi}{\xi^2}$ となります．これを Fourier 逆変換して文字を変えることにより，$\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ の Fourier 変換が次の関数であることが分かります．

$$f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(\xi+2), & -2\le\xi\le 0,\\ -\dfrac{\pi}{2}(\xi-2), & 0\le\xi\le 2,\\ 0, & |\xi|\ge 2.\end{cases}$$

問題で $\sin x$ 一つ分を $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ と書き換えることにより，答えは $\dfrac{f(\xi-1)-f(\xi+1)}{2i}$ であることがわかります．これより答えは次のようになります．

$$\begin{cases}\dfrac{\pi i}{4}(\xi+3), & -3\le\xi\le -1,\\ \dfrac{-\pi i}{2}\xi, & -1\le\xi\le 1,\\ \dfrac{\pi i}{4}(\xi-3), & 1\le\xi\le 3,\\ 0, & |\xi|\ge 3.\end{cases}$$

留数計算で求めることも可能ですがもっとめんどうです．またあとで教える超関数の Fourier 変換を使えば $\sin^3 x$ の Fourier 変換が求まるので，もっと簡単にできます．

[2] $h(x)=\max(1-|x|,0)$ とおきます．$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} h(n^2(x-n))$ とおくと，これは連続で，単調収束定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

なので可積分でもあります．もし $\hat{f}$ が可積分であったとしたら，Fourier 反転公式と Riemann-Lebesgue の定理により，f とほとんどいたるところ一致する連続関数 g で，

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ となるものが存在しなくてはいけません．f, g の連続性より，すべての x について $f(x) = g(x)$ でなくてはなりませんが，これは不可能です．

[3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f(x-y) g(y)\, dy$$

において，$\dfrac{d}{dx} f(x-y)$ は有界，$g(y)$ は y の可積分関数です．よって積分記号下での微分が許され，上記積分は $\dfrac{d}{dx}(f * g)(x)$ に等しくなります．これが何度でも繰り返せるので，自然数 k に対し，

$$\frac{d^k}{dx^k}(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k f}{dx^k}(x-y) g(y)\, dy$$

となります．$|x|^m |\dfrac{d^k}{dx^k}(f * g)(x)|$ を評価するため，$|x| \leq |x-y| + |y|$ として二項展開すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^l |\frac{d^k f}{dx^k}(x-y)| |y|^{m-l} |g(y)|\, dy$$

の形の項の有限和 $(l = 0, 1, \ldots, m)$ が出てきます．この積分において，$|x-y|^l |\dfrac{d^k f}{dx^k}(x-y)|$ は有界で，$|y|^{m-l}|g(y)|$ は y の可積分関数であることが容易にわかるので，上の積分は有界となります．これで $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がわかりました．

あるいは，Fourier 変換することにより，$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であることを示してもできます．この方が少し簡単です．

[4] 正しくありません．$f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = 1/(1+x^2)$ とおくと，$f * g$ の Fourier 変換は $\pi^{3/2} e^{-\xi^2/4} e^{-|\xi|}$ となり，これは $\xi = 0$ で微分可能ではないので反例となります．