2019 年度解析学 VI 期末テスト

2020 年 1 月 15 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

問題用紙は 2 枚あります.

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.

自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．(ノートをデジタル的にとっている人については，プリントアウトの持ち込みを認めます．) 電子機器の使用は不可です.

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙に収まるように書いてください．答案用紙の裏面を使用してもかまいませんが，その場合は表面の一番下に「裏面使用」と書いてください.

[1] 実数 x に対し，$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とおく．($g(0) = 1$ と定める．) このとき $f * g(x)$ を求めよ.

[2] 以下のように a_n $(n \in \mathbb{Z})$ を定める.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ が偶数の時}, \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ が奇数の時}. \end{cases}$$

これを Fourier 係数に持つような $[0, 2\pi]$ 上の関数 $f(x)$ を求めよ.

[3] $f(x)$ を $(0, 2\pi)$ 上の Lebesgue 可積分関数とし，その Fourier 係数を a_n $(n \in \mathbb{Z})$ とする．任意の自然数 k について $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |a_n| < \infty$ であれば，$f(x)$ は $(0, 2\pi)$ 上 C^∞ 級であることを示せ.

[4] 自然数 n, 実数 $x \neq 0$ に対し，$f_n(x) = (1 - \cos nx)/(nx^2)$ とおき，$f_n(0) = 0$ とする．f_n を超関数と思って $n \to \infty$ とした極限の超関数を求めよ.

[5] 次の条件を満たす $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ で，$x \neq 0$ の時いつでも $f(x) \neq 0$ となるものの例を挙げよ.

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} T = \{0\}$ ならば $fT = 0$.

[6] $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

とおく．この時次の問いに答えよ．

(1) T が超関数であることを示せ．

(2) T が緩増加超関数であることを示せ．

(3) T の Fourier 変換を求めよ．

[7] m を自然数とし，$s \geq 0$ とする．$f \in W^{m,1}(\mathbb{R}), g \in H^s(\mathbb{R})$ ならば $f * g \in H^{s+m}(\mathbb{R})$ であることを示せ．