2019 年解析学特別演習 III テスト (7) 解答解説

2020 年 1 月 14 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 25 点で，平均点は 61.5 点，最高点は 100 点 (3 人) でした．

[1] $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とおけば $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ なので，$f \in \displaystyle\bigcap_{s\geq 0} H^s(\mathbb{R})$ ですが，これは急減少ではありません．

[2] T を Fourier 変換すると $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j (i\xi)^j$ となります．そこで $a_j \neq 0$ となる j があるときは，そのような j で最大のものを k とおいて，s の範囲は $s < -k - 1/2$ です．そのような j がないときは $T = 0$ なので s の範囲はすべてです．

[3] まず

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi^{3/2}\log\xi}, & \xi \geq 2, \\ 0, & \xi < 2. \end{cases}$$

とおくと，これは L^2 関数です．これを Fourier 逆変換したものを $f(x)$ とおけば条件を満たしています．

[4] $f \in H^1(\mathbb{R})$ に対し，

$$\hat{f}(\xi) = (1+\xi^2)^{-1/2}(1+\xi^2)^{1/2}\hat{f}(\xi)$$

と書けば，

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|(1+\xi^2)^{-1/2}\|_2\|f\|_{H^1}$$

であり，$\|(1+\xi^2)^{-1/2}\|_2 = \sqrt{\pi}$ なので，C として $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が取れます．

一方，$f(x) = e^{-|x|}$ とすれば，$\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$ であり，$f \in H^1(\mathbb{R})$ がわかります．このとき，$\|f\|_\infty = 1$, $\|f\|_{H^1} = \sqrt{2}$ となるので，C の最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 以上です．これらを合わせて C の最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ です．