

2018 年解析学特別演習 III テスト (2)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

自筆ノート持ち込み可で行います。本、コピー等は不可です。計算用紙はありません。自分のノート等を使ってください。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] $f(t)$ を $(0, \infty)$ 上の複素数値有界 Lebesgue 可測関数とする。 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ とおき、 $z \in H$ の時、 $F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{itz} dt$ とおく。この積分の値が複素数値で定まり、 $F(z)$ が H 上正則となることを示せ。(使う定理の名前とその定理が使える根拠をはっきりと述べること。)

[2] $f(x)$ を \mathbb{R} 上の複素数値 Lebesgue 可測関数で、ほとんどいたるところ微分可能なものとする。この時、

$$g(x) = \begin{cases} f'(x), & f(x) \text{ が微分可能なとき,} \\ 0, & f(x) \text{ が微分不可能なとき,} \end{cases}$$

と定義すると、 $g(x)$ は、 \mathbb{R} 上 Lebesgue 可測であることを示せ。

[3] 実軸 \mathbb{R} 上で Lebesgue 測度を考える。

(1) L^1 だが L^2 でない関数の例を挙げよ。

(2) L^2 だが L^1 でない関数の例を挙げよ。

(いずれも根拠をきちんと述べること。)

[4] 次の値を求めよ。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\sin x}{x} dx.$$

[5] 次の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$