解析学 VI 期末テスト解答解説

2012 年 2 月 21 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

期末試験の配点は，[1], [2], [3] が各 20 点，[4], [5], [6] が各 30 点の 150 点満点です．最高点は 150 点 (2 人)，平均点は 77.1 点で得点分布は次のとおりでした．

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
2(人)	3	2	5	6	0	2	5	9

成績との対応は，45 点未満が D，45 点〜59 点が C，60〜79 点が B，80 点以上が A です．ただし，演習の小テストの成績が良かったため，これにプラスアルファをつけた人が 2 人います．この結果，A, B, C, D の人数はそれぞれ，17, 5, 7, 5 人となりました．この点数と成績が答案の左上に赤字で書いてあります．プラスアルファがついた人にはプラス記号がついています．

また演習の成績は最初に言ったとおり，8 回分のうち 1 番悪い 1 回分を除いた平均点に，さらに臨時の 1 回分は数えると平均点が上がる場合のみ，算入しました．この点数の最高点は 85 点 (1 人)，平均点は 42.5 点で，分布は次のとおりです．(ただし欠席の回は 0 点として，一度でも受けた人は表に入っています．)

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
7(人)	4	4	6	2	3	2

この点数の成績との対応は，19 点未満が D，20 点〜29 点が C，30〜59 点が B，60 点以上が A となっています．ただし，こちらも期末試験がよくできたことによるプラスアルファをつけた人が 4 人います．この結果，A, B, C, D の人数はそれぞれ，11, 7, 3, 7 人となりました．この点数と成績が答案の右上に青字で書いてあります．プラスアルファがついた人にはプラス記号がついています．しかし，解析学特別演習 II は俣野先生との共同担当なので，この成績に俣野先生の分を総合したものが実際の成績表につくことになります．すなわち，両方で C 以上の成績がついた人について，二つの成績の良い方が，実際に成績表につく総合成績です．

以下各問の略解，解説をつけます．簡単に示せるところの説明は簡単にすませてあります．実際の答案でもそのあたりはあまり厳しくつけてありません．Fourier 変換の定義でどこに 2π をつけるかは取り決めの問題なので，授業と違うものを使っていても O.K. ですが，当然首尾一貫している必要があります．また，計算法は一例を示しただけで，当然他のやり方もいろいろあります．

[1] $\varphi''(x)+\varphi(x)=0$ を解くことになるので，$\varphi(x)=ae^{ix}+be^{-ix}$ (a,b は任意の定数) です．

[2]

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}=\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i}$$

と，$\dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換が $\pi e^{-|\xi|}$ であることより，答えは

$$\frac{\pi i}{4}(e^{-|\xi+2|}-e^{-|\xi-2|})$$

です．

[3] (1) 定義通りチェックすればすぐできます．
(2) たとえば $a_n=e^n$ とすればできます．

[4] まず，級数は一様絶対収束して周期 2π の関数を与えることは明らかです．そこで，$x\in[0,2\pi]$ の時のみ考えれば十分なので以下そうします．($x\in[-\pi,\pi]$ で考えてももちろん O.K. です．そうすると見かけ上違う式が出ます．)

まず，問題の式を $\mathbf{R}$ 上の超関数と思って，T と書きます．超関数としては項別微分が自由にできるので，4 回微分して Poisson の和公式を使えば，

$$T''''=\sum_{n\neq 0}e^{inx}=2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta_{2\pi n}-1$$

を得ます．$[0,2\pi)$ 上で $f(x)=-x$ となる関数を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に延ばしたものを再び $f(x)$ と書くと，超関数として $f'=T''''$ であることより，超関数として $T'''=f+a$ (a は定数) であることがわかります．次に f を普通に積分することにより T'' を求めますが，T'' は項別微分したものが普通に一様絶対収束しているので $\mathbf{R}$ 上の周期 2π の連続関数です．この周期性より $a=\pi$ がわかり，$T''=-\dfrac{x^2}{2}+\pi x+b$ (b は定数) ということがわかります．同様にして，T',T を求めていくと，$T'=-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{\pi}{2}x^2-\dfrac{\pi^2}{3}x+c$, $T=-\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{\pi x^3}{6}-\dfrac{\pi^2x^2}{6}+d$ が得られます．(c,d は定数．) $x=0$ とおくことにより，$d=\dfrac{\pi^4}{45}$ がわかるので，答えは

$$-\frac{x^4}{24}+\frac{\pi x^3}{6}-\frac{\pi^2x^2}{6}+\frac{\pi^4}{45}$$

です．

[5] 特性関数 $f(x)=\chi_{[-1,1]}(x)$ と，$g(x)=e^{-|x|}$ はいずれも L^1 関数で，これらの Fourier 変換はそれぞれ，$\hat f(\xi)=\dfrac{2\sin\xi}{\xi}$ と，$\hat g(\xi)=\dfrac{2}{1+\xi^2}$ です．よって，$f*g$ の Fourier 変換は，$\dfrac{4\sin\xi}{\xi(1+\xi^2)}$ となり，$\dfrac{\sin\xi}{\xi(1+\xi^2)}$ の Fourier 逆変換が $\dfrac{f*g}{4}$ となります．このことから，符号と係数を考えれば，答えは

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(e^{\xi+1}-e^{\xi-1}), & \xi\le -1 \text{ の時},\\ \dfrac{\pi}{2}(2-e^{\xi-1}-e^{-\xi-1}), & -1\le\xi\le 1 \text{ の時},\\ \dfrac{\pi}{2}(e^{-\xi+1}-e^{-\xi-1}), & 1\le\xi \text{ の時},\end{cases}$$

となります．

[6] (1) $f*g$ が有界であることからすぐわかります．
(2) f,g が共に急減少である時は，急減少の試験関数にあてることにより，直接わかります．一般の時は，L^2 関数を急減少関数で L^2 近似すればできます．(近似がちゃんとうまくいくことを示すには多少の議論が必要です．)