

解析学特別演習 II・小テスト (7)

2011 年 12 月 12 日 10:00–12:15

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。裏面を使用してもかまいませんが、その場合は表面の最後に「裏面使用」と書いてください。

自分のノートの持ち込み可です。

以下、 $\mathbf{R}$  上で考えている測度はすべて Lebesgue 測度である。

[1]  $[-\pi, \pi]$  上の関数  $f(x) = |x|^3$  の Fourier 級数展開を求めよ。

[2]  $[0, 2\pi]$  上の Fourier 級数展開が  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{e^{inx}}{2n+1}$  になる  $L^2$  関数を具体的に求めよ。

[3]  $f \in L^2([0, 2\pi])$  とし、整数  $n$  に対し  $c_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx$  とおく。すべての自然数  $k$  について  $\sum_n |n|^k |c_n|^2 < \infty$  であれば、 $f$  は、ある  $C^\infty$  級関数とほとんどいたるところ一致することを示せ。

[4]  $\mathbf{R}$  上の関数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  に対し、 $f_k(x) = (f * f * \cdots * f)(x)$  とおく。 ( $f$  の  $k$  個の convolution をとったものである。 ) このとき  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f_k(2\pi n)$  を求めよ。