解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (4)

2010 年 11 月 29 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 95 点 (1 人)，平均点は 53.8 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] Poisson の和公式を使いますが，この関数は急減少ではないので，使えることをきちんと確認する必要があります．

$\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$ であり，$\hat{f}_n(\xi) = \dfrac{2^n}{(1+\xi^2)^n}$ となります．これらはすべて L^1 です．また，$\dfrac{2^n}{(1+\xi^2)^n}$ を 2 回微分しても L^1 であることがわかり，その Fourier 逆変換は $-x^2 f_n(x)$ です．これが有界なので，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_n(x+2\pi k)$ は一様絶対収束します．また，f_n は連続で，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)$ も絶対収束なので，Poisson の和公式が使えます．

すると，

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_n(2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{2^n}{(1+k^2)^n}$$

となります．この右辺の無限和は，2^n 以上，$2^n C$ 以下となります．(C は n によらない定数です．) よって，log をとって，n で割って極限を取ると，$2\pi, C$ は無視できるので，答えは $\log 2$ です．

[2] これも Poisson の和公式の応用です．f は急減少なので，$f\left(\dfrac{x}{2\pi n}\right)$ に対して Poisson の和公式をつかうと，

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2\pi f\left(\frac{k}{n}\right) = 2\pi n \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(2\pi n k)$$

となります．$\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ なので，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - S_n\right| = \sum_{k\neq 0} \hat{f}(2\pi n k)$$

がわかります．問題の j は 2 以上と仮定してかまいません．すると，$\hat{f}$ も急減少であることから，定数 a_j が存在して，$|\hat{f}(2\pi n k)| \le \dfrac{a_j}{n^j |k|^j}$ となります．$\sum_{k\neq 0} \dfrac{a_j}{|k|^j} = C_j$ とおけば結論が出ます．

[3] 定義通り計算すれば，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_n$ になります．

[4] 定義通り計算すれば，$n > m$ のとき 0, それ以外の時は $(-1)^n m(m-1)\cdots(m-n+1)\delta^{(m-n)}$ となります．