

解析学特別演習 II・小テスト (4)

2010 年 11 月 15 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

時間は 13:00 ~ 14:30 です .

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください . 裏面を使用してもかまいませんが , その場合は表面の最後に「裏面使用」と書いてください .

自筆ノート持ち込み可で行います . 本 , コピー等は不可です . 計算用紙はありません . 自分のノート等を使ってください .

[1] $f(x) = e^{-|x|}$ (x は実数) とおき , f を n 個 convolution した , $f * f * \cdots * f$ を f_n とおく . このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} f_n(2\pi k) \right)$$

を求めよ .

[2] f を \mathbf{R} 上の急減少関数とする . 自然数 n に対し ,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f \left(\frac{k}{n} \right)$$

とおく . 任意の自然数 j に対し , 定数 C_j が存在して , すべての n に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{C_j}{n^j}$$

がなりたつことを示せ .

[3] 実数 x に対し , x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す . この関数 $[x]$ を \mathbf{R} 上の超関数と思ったものの微分はどのような超関数か . 具体的に記述せよ .

[4] n, m を非負整数とする . \mathbf{R} 上の超関数 $x^n \delta^{(m)}$ はどのようなものか , 具体的に記述せよ . ただし , $\delta^{(m)}$ は δ -関数の m 階微分である .