解析学特別演習 II・小テスト (1) 解説

2010 年 10 月 12 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 100 点 (4 人)，平均点は 44.9 点でした．([1] のせいで点数が負になった人は 0 点にしています.）簡単な解説を下につけます．(実際の答案はもっときちんと書かないと減点になります．)

[1] (各小問とも正解で 0 点，不正解で −20 点) これらの定理はこの授業で頻繁に使います．これらが身についていないと 確実についていけなくなります．怪しい人は 必ず，よく復習しておいてください．

チェックでは可測かどうか，すべての点での収束かそれとも a.e. か，などはとりあえず問題としませんでした．重要な点は下記のとおりです．

(1) すべての関数の絶対値が共通の可積分関数で抑えられること

(2) 不等号の向きと，関数が正値であること (あるいは実数値可積分関数で下から抑えられること)

(3) 単調増大性と，関数が正値であること (あるいは実数値可積分関数で下から抑えられること)

[2] (25 点) これが出来ていない人は，数学科 3 年生の資格はありません．深く反省し，復習してください．

[3] (25 点) 有理数全体は可算なので，$\{p_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ とします．任意の自然数 k に対し，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(p_n - 2^{-k-n}, p_n + 2^{-k-n})$ は稠密な開集合で，その測度は 2^{1-k} で抑えらます．k はいくらでも大きくできるので，下限は 0 です．

[4] (25 点) 各自然数 $n \geq 1$ に対し，$|f(x)| \geq 1/n$ となる集合の測度が 0 なので，n について和を取って，$|f(x)| > 0$ となる集合の測度が 0 となります．

[5] (25 点) $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ とし，それぞれの項について，原点中心，半径 N で上・下半平面にある半円板の境界上の留数計算を行って，$N \to \infty$ とします．半円周上の積分は 0 に行き，$z = \pm i$ での留数から，答えは π/e となります．