

解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (6)

2010 年 12 月 20 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

最高点は 85 点 (1 人), 平均点は 41.6 点でした. 簡単な解説をつけます.

[1] これができない人は, ほかの問題の結果にかかわらず, 即座に 0 点です.

[2] 積分範囲を  $|x| > 1$  と  $|x| \leq 1$  に分けて考えれば, 前者では問題なく評価でき, 後者では試験関数の微分の評価より結論が出ます.

[3]  $e^{-\varepsilon x} \chi_{\{x>0\}}$  の Fourier 変換と比べることにより,  $\frac{1}{x+i\varepsilon}$  の Fourier 変換は  $-2\pi i e^{-\varepsilon x} \chi_{\{x>0\}}$  です. ここで  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすれば,  $-2\pi i e^{-\varepsilon x} \chi_{\{x>0\}}$  は,  $S'(\mathbf{R})$  において,  $-2\pi i \chi_{\{x>0\}}$  に収束することより, (1)-(3) が一気にできて, これが (3) の答えとなります.

[4] (1), (2) は定義通りにすればすぐできます. (3) は,  $\varphi \in S(\mathbf{R})$  としたとき, Poisson の和公式により,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} n \hat{\varphi}(n) = -i \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}'(n) = -2\pi i \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi'(2\pi n)$$

を得ます. よって, 答えは  $2\pi i \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta'_{2\pi n}$  です.