解析学特別演習 II・小テスト解説 (3)

2007 年 11 月 12 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は，[1] が 30 点，[2] が 10 点 $\times 3$, [3] が両方向 20 点ずつです．平均点は 54.2 点，最高点は 95 点 (2 人) でした．

一部難しい問題も出していますが，習ったばかりなわけだし，その場で解けないことは別にそれほど問題ではありません．時間が終わった後も考える，ほかの人と話し合ったり，本を読んだりして考える，返ってきた答案や解説を見て考える，というところまで含めて演習ですので，とにかく自分で考えることが重要です．(解説は簡単なことは省略してあるので，すぐにはわからない場合はよく考えてみてください．)

[1] $p=2$ のときはもちろん通常の内積で O.K. です．それ以外のときは中線定理が不成立な例が簡単に作れるので内積は入れられません．

[2] (1) 凸であることはすぐにわかります．閉であることを示すため，K 内の点列 $\{f_n\}_n$ が f に L^1-収束していたとします．このとき，各区間 $[k,k+1]$ 上に制限しても，$\{f_n\}_n$ は f に L^1-収束しています．(k は整数です．) $\{f_n\}_n$ を $[k,k+1]$ 上に制限して $L^1([k,k+1])$ の点列と思ったものはスカラーの成す列で，そのスカラーたちは Cauchy 列ですから，$[k,k+1]$ での収束先もスカラーです． さらに $(-\infty,0)$ でほとんどいたるところ $f(x)=0$ であることもすぐわかるので，f というのは，$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty c_k\frac{k+1}{k}\chi_{[k-1,k]}$ の形をしています．(各 c_k は 0 以上の実数．) $\displaystyle g=\sum_{k=1}^\infty \frac{k}{k+1}\chi_{[k-1,k]}$ とおくと，これは $L^\infty(\mathbf{R})$ の元なので，

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)f_n(x)\,dx \to \int_{-\infty}^\infty g(x)f(x)\,dx$$

となります．このことより，$\sum_{k=1}^\infty c_k=1$ が出ます．

(2) $c=1$ はすぐにわかります．

(3) $\displaystyle f=\sum_{n=1}^\infty t_n\frac{n+1}{n}\chi_{[n-1,n]}$ のとき，$\displaystyle \|f\|_1=\sum_{n=1}^\infty t_n\frac{n+1}{n}$ ですが，どれかの t_n は正なので，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty t_n\frac{n+1}{n}>\sum_{n=1}^\infty t_n=1$ となって等号は成立しません．

[3] まず (1) を仮定します．$f=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_ke^{ikx}$ が L^2-収束の意味で成り立ちますが，(1) で $N=2$ とした場合より $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|<\infty$ となります．よって，上の式の右辺は一様絶対収束し，それが f を与えます．次に (1) の仮定より $f=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_ke^{ikx}$ において積分記号下の微分が何回でもできるため，微分と無限和の順序交換ができます．これより，(2) が出ます．

次に (2) を仮定します．f は何回微分してもやはり周期 2π を持つ連続関数ですから，部分積分を繰り返し使えば $\sum_{k\in\mathbf{Z}}(|k|^{N+1}|c_k|)^2$ が収束することがわかります．$\sum_{k\in\mathbf{Z},k\neq0}|k|^{-2}$ が収束することより，$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|k|^N|c_k|$ が収束します．