

解析学特別演習 II・小テスト解説 (6)

2008 年 1 月 21 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は, [1] 15×2 , [2] (1) 15 点, (2) 10 点, (3) 15 点, [3] 15 点 $\times 2$ です. 平均点は 48.0 点, 最高点は 95 点 (1 人) でした.

[1] N, c がとれて, 任意の急減少関数 φ に対して, $|\langle T, \varphi \rangle| \leq cp_N(\varphi)$ となっています. このとき,

$$|\langle xT, \varphi \rangle| = |\langle T, x\varphi \rangle| \leq cp_N(x\varphi)$$

であり, $p_N(x\varphi) \leq (N+1)p_{N+1}(\varphi)$ なので xT も緩増加となります. 同様に,

$$|\langle T', \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi' \rangle| \leq cp_N(\varphi')$$

であり, $p_N(\varphi') \leq p_{N+1}(\varphi)$ なので T' も緩増加となります.

言うまでもなく, φ によらず, 共通の N, c が取れることが重要なのですが, それがよくわかっていない人がかなりいました.

[2] (1) 任意の試験関数 φ の台はコンパクトなので $\sum \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle \delta_n, \varphi \rangle$ は実際には有限和です. 試験関数の列 $\{\varphi_n\}_n$ が φ に収束しているときも, すべての φ_n の台が共通のコンパクト集合に含まれているので $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$ が $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ 上連続であることもわかります.

(2) 試験関数 φ に対し, $|\varphi(0)| \leq p_0(\varphi) \leq p_2(\varphi)$ であり, また 0 でない整数 n について $|\varphi(n)| \leq p_2(\varphi)/n^2$ であることより, 適当な C について $|\sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi(n)| \leq Cp_2(\varphi)$ となります. (たとえば $C = 5$ と取れます.) すなわち $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$ は緩増加です.

(3) Poisson の和公式が, そのまま $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$ の Fourier 変換を与える式になっています. 答えは $2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n}$ です.

[3] (1) $\text{sgn}(\sin x)$ は有界なので簡単にできます.

(2) $T = \text{sgn}(\sin x)$ とおくと, $T' = 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2n\pi} - 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{(2n+1)\pi}$ であることは簡単にわかります. これと, [2] (3) をあわせると, $i\xi \hat{T} = 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n - 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \delta_n$ となるので, この右辺は $\sum_{n \in \mathbf{Z}} 4\delta_{2n+1}$ となります. これより, $\hat{T} = -4i \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\delta_{2n+1}}{2n+1} + c\delta_0$ を得ます. ただし, c は定数です. $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\varphi(0) \neq 0$ となる試験関数 φ での値を見ることにより, $c = 0$ がわかるので, 答えは $-4i \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\delta_{2n+1}}{2n+1}$ です.