2004 年度解析学 VII・関数解析学期末テスト・解答解説

2004 年 9 月 14 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 25 点の 150 点満点です．最高点は 146 点 (1 人)，平均点は 63.8 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
14 (人)	2	3	3	3	2	7

成績は，80 点以上を A, 65〜79 点を B, 50〜64 点を C, 49 点以下を D としました．(ボーダーラインの答案は 1 枚ずつ確認した上でこの成績に決めました．)

各問の簡単な解答と解説は次のとおりです．

[1] X を有限次元なので，ノルムはどれでも同値です．そこで基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ を取って $x\in X$ に対し，$x=\sum_{j=1}^n c_je_j$ と書いた上で $\|x\|=\sum_{j=1}^n |c_j|$ であるとしてかまいません．このとき，$K=\max_{j=1}^n \|Te_j\|$ とおけば $\|Tx\|\le K\|x\|$ となるので T は有界です．

[2] $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in\ell^1$ であれば，十分大きい n では常に $|x_n|<1$ なのでそこでは $|x_n|^p<|x_n|$ となり，このことより $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p<\infty$ がわかります．ℓ^1 が和とスカラー倍で閉じていることは明らかです．

次に $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in\ell^p$ に対し，$k+1$ 番目以降を 0 に置き換えた数列を $x^{(k)}$ とおくとこれは明らかに ℓ^1 に入っており，また，ℓ^p において，$k\to\infty$ のとき，$x^{(k)}\to x$ です．したがって，もし，ℓ^1 は ℓ^p の閉部分空間であるとすると $\ell^1=\ell^p$ ということになりますが，$a_n=1/n$ という数列 $a=\{a_n\}_{n=1}^\infty$ については $a\in\ell^p$, $a\notin\ell^1$ なのでこれは矛盾です．したがって，ℓ^1 は ℓ^p の閉部分空間ではありません．

[3] f_n が，$L^p([0,2\pi])$ において 0 に弱収束していることを示します．

まず $1/p+1/q=1$ となる q を選びます．($p=1$ のときは $q=\infty$.) $L^p([0,2\pi])^*$ の任意の元 ϕ に対して，$g\in L^q([0,2\pi])$ が存在して，任意の $f\in L^p([0,2\pi])$ に対して $\phi(f)=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ となります．今，$[0,2\pi]$ の測度が有限なことより，$L^q([0,2\pi])\subset L^1([0,2\pi])$ となるので g に対して Riemann-Lebesgue の定理が使えて，$n\to\infty$ のとき $\int_0^{2\pi} e^{inx}g(x)\,dx\to 0$ となります．これは，f_n が 0 に弱収束していることを意味します．

[4] Fourier 変換は，H から $\ell^2(\mathbf{Z})$ へのユニタリ作用素を与えるので，これによって $\ell^2(\mathbf{Z})$ の上の話にすることができます．すると，Riemann-Lebesgue の定理より，$f\in H$ に対し $g*g*g*f$ を対応させる作用素が compact であることがわかります．よって，T は Fredholm 作用素であることがわかり，その index は 0 です．

[5] $\{T_gf\mid f\in L^\infty(\mathbf{R})\}$ の $L^2(\mathbf{R})$ における閉包を K とおきます．

単射性は，$\{x\mid g(x)=0\}$ が測度 0 であることと同値であることが簡単にわかります．これが十分条件であることをまず示します．g を 測度有限の可測集合 A 上に

制限して考えると，$A_k = \{x \in A \mid |g(x)| > 1/k\}$ とおいたとき，$\bigcup_k A_k = A$ であるとしてかまいません．(測度 0 の集合は無視できるので．) このとき，$\chi_{A_k}/g \in L^\infty$ だから，$\chi_{A_k} \in K$ で，$\chi_A \in K$ となります．χ_A たちの線形結合は $L^2(\mathbf{R})$ で稠密なので，これから $L^2(\mathbf{R}) = K$ がわかります．

逆に，$A = \{x \mid g(x) = 0\}$ としてこれが測度 0 でなかったとすると，$L^2(A)$ の元はすべて，K の元と直交しているので K は稠密にはなりえません．

(2) 全射になったとすると，(1) より単射でもあり，また連続でもあるので，開写像定理から逆も連続になります．つまり，定数 K が存在して，$\|f\|_\infty \le K\|fg\|_2$ となりますが，f として，$\chi_{(0,1/n)}$ をとれば矛盾します．したがって，全射になることはありません．

[6] (1) ⇔ (2) ⇒ (3), (4) だが，ほかの向きは成り立たない，というのが答えです．

(1) ⇒ (2): $\sup_n \|F_n\|_\infty = M$ とおくと，任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$g \in K$, $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ を取れば，N があって，$n > N$ のとき，$\|F_n g\|_2 < \varepsilon$ となります．このとき，$n > N$ ならば $\|F_n f\|_2 = \|F_n(f-g)\|_2 + \|F_n g\|_2 < (M+1)\varepsilon$ なので結論が出ます．

(2) ⇒ (1): $f \mapsto F_n f$ を，$L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への線形写像の族と思うと，一様有界性原理が使えて，この写像のノルムたちが一様に有界となります．これはつまり，$\sup_n \|F_n\|_\infty < \infty$ ということです．

(2) ⇒ (3): 自明.

(2) ⇒ (4): Cauchy-Schwarz の不等式より明らか.

(3) から他の条件が出ないこと: K として compact 台の連続関数全体を取れば，これは確かに $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な部分空間です．$F_n = n\chi_{(n,n+1)} \in L^\infty(\mathbf{R})$ とおくと，(3) が成り立っていますが，(1), (2), (4) のいずれも成り立ちません．(もし，(4) が成り立っていれば一様有界性原理を 2 回使うことにより $\sup_n \|F_n\|_\infty < \infty$ が成り立つはずです．)

(4) から他の条件が出ないこと: $F_n(x) = e^{inx}$ とおけば，Riemann-Lebesgue の定理より (4) が成り立っています．しかしこのとき，$f \in L^2(\mathbf{R})$ について $\|F_n f\|_2 = \|f\|_2$ なので (1), (2), (3) のいずれも成り立ちません．