解析学 VI 冬学期試験問題 (2/1/1992)

河東泰之

問題は 200 点分あります．100 点（以上）になるように問題を選択して解いてください．

授業での Fourier 変換 $\mathcal{F}$，逆変換$\tilde{\mathcal{F}}$の定義は,

$$(\mathcal{F}f)(\xi)=\int_{\mathbf{R}}f(x)e^{-ix\xi}\,dx,\quad (\tilde{\mathcal{F}}f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$$

です．これと異なる定義を用いる人は，自分の定義を明記してください．

[1] (15 点) 実軸 $\mathbf{R}$ 上の関数$\chi_{[-1,1]}(x)$ （閉区間 $[-1,1]$ の特性関数）は，どの範囲の s に対し，Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ の元となるか.（ただし，$s>0$ とする.）

[2] (20 点) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\ dx}{x(e^x+e^{-x})}$$

[3] (20 点) Banach 空間 ℓ^1から，Banach 空間 c_0（0 に収束する複素数列全体）への線型写像Tを，$(Tx)_n=\sum_{m\geq n}x_m$, $(x=(x_n)\in\ell^1)$ で定める．$T^*:\ell^1\to\ell^\infty$を求めよ．

[4] (20 点) Hilbert 空間 ℓ^2の元，$x=(x_n)$ に対し，$(Tx)_n=c_nx_{n+1}$とはたらく作用素 T を考える．ただし，ここで (c_n) は有界な複素数列である．いつ，この Tが compact 作用素になるか答えよ．

[5] (20 点) $C_0^\infty(\mathbf{R})$ の元 $f(x)$ を取る．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\right)f(x)\,dx$$

[6] (20 点) 可分（separable）な無限次元 Hilbert 空間 H上の compact operator 全体のなす Banach 空間を $\mathcal{K}(H)$ とする．この $\mathcal{K}(H)$ は，可分であることを示せ．

[7] (20 点) 次の命題は正しいか？正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ．

「任意の $L^1(\mathbf{R})$ の元 $f(x)$ に対し，$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 $T_f:g\mapsto f*g$, $(g\in L^2(\mathbf{R}))$ は compact である.」

[8] (20 点) 反射的（reflexive）Banach 空間 Xから Banach 空間 Yへの有界線型作用素 T に対し，Tが単射であることと，T^*Y^*が X^*で稠密であることは同値であることを示せ．

[9] (15 点) 反射的（reflexive）Banach 空間 Xから Banach 空間 Yへの compact operator Tに対し，$\|Tx\|=\|T\|$ となる $x\in X$で，$\|x\|=1$ となるものが存在することを示せ．

[10] (30 点) Banach 空間 ℓ^1の点列 $\{x_n\}_n$が $x\in\ell^1$に弱収束しているとする．このとき，実は $\{x_n\}_n$は，x に ℓ^1-norm で収束していることを示せ．