II_1 factor の基礎的事項

河東泰之

Hilbert 空間 Hは，以下すべて可分無限次元とする．$B(H)$ で，H上の有界線型作用素全体を表す．作用素環を表すのに，$M, N, R, P, Q, \ldots$ などの文字を，作用素を表すのに，$x, y, z, t, s, a, b, \ldots$ などの文字を，Hilbert 空間の vector を表すのに，$\xi, \eta, \zeta, \ldots$ などの文字を用いる．Hの内積は，(ξ, η) と書き，作用素 x の conjugate x^*は $(x\xi, \eta) = (\xi, x^*\eta)$ で定められる．このとき，$\|x^*x\| = \|x\|^2$が成り立つ．

[1] $B(H)$ 上に，以下の 5 つの位相を入れる．以下，(x_i) は net である．

(1) norm topology
(2) strong operator topology: $x_i \to x \iff \|x_i\xi - x\xi\| \to 0 \quad \forall \xi \in H$.
(3) weak operator topology: $x_i \to x \iff |(x_i\xi, \eta) - (x\xi, \eta)| \to 0 \quad \forall \xi, \eta \in H$.
(4) σ-strong operator topology: $x_i \to x \iff \sum_{j=1}^\infty \|x_i\xi_j - x\xi_j\|^2 \to 0$ $\forall \xi_j \in H$ with $\sum_{j=1}^\infty \|\xi_j\|^2 < \infty$.
(5) σ-weak operator topology: $x_i \to x \iff |\sum_{j=1}^\infty (x_i\xi_j, \eta_j) - (x\xi_j, \eta_j)| \to 0$ $\forall \xi_j, \eta_j \in H$ with $\sum_{j=1}^\infty \|\xi_j\|^2 < \infty, \sum_{j=1}^\infty \|\eta_j\|^2 < \infty$.

σ-strong (weak) operator topology は，ultrastrong (ultraweak) operator topology とも呼ばれる．また，“operator” は，しばしば省略する．（Banach 空間としての強位相，弱位相と混同しないこと．）Norm topology が一番強い位相である．$B(H)$ の（norm に関する）単位球上では，σ-strong operator topology と strong operator topology, σ-weak operator topology と weak operator topology とは同じである．（[T1] Chapter II, Section 2, [UHO] 4.1.）

[2] （von Neumann の double commutant theorem）$B(H)$ の 1 を含む$*$-部分環 Mに対し，以下の 3 条件は同値である．

(1) $M'' = M$.
(2) Mは，σ-strongly closed.
(3) Mは，weakly closed.

（ただし，記号 M'は，$\{x \in B(H) \mid xy = yx, \quad \forall y \in M\}$ を表し，Mの commutant と言われる．）これらが満たされるとき，Mを von Neumann 環という．（[KR] Section 5.3, [T1] Theorem II.3.9, [UHO] 定理 4.20.）

[3] （自己共役作用素のスペクトル分解）H上の自己共役作用素（self-adjoint operator）h（すなわち $h = h^*$）に対し，スペクトル測度 $\{E_\lambda\}$ が一意的に存在して，$h = \int_{-\infty}^\infty \lambda \, dE_\lambda$ と表せる．ただし，E_λは，H上の直交射影（projection）の族であり，次の性質を満たすものである．E_λは spectral projection と言われる．

(1) $E_\lambda \le E_\mu, \quad (\lambda < \mu)$.
(2) $\mu \downarrow \lambda$のとき，$\|E_\mu\xi - E_\lambda\xi\| \to 0, \quad \forall \xi \in H$.
(3) $\lambda \downarrow -\infty$ のとき，$\|E_\lambda\xi\| \to 0, \quad \forall \xi \in H$.
(4) $\lambda \uparrow \infty$ のとき，$\|E_\lambda\xi - \xi\| \to 0, \quad \forall \xi \in H$.

h が有界のときは，h のスペクトルは有界区間 $[a, b]$ に含まれ，上の積分は$\int_a^b$で置き換えられる．

（これについては，さまざまな関数解析の本を見よ．たとえば,「関数解析 III」（伊藤清三，岩波講座基礎数学）の 12 章,「関数解析」（黒田成俊，共立数学講座 15）の 12 章，“Functional Analysis” (K. Yosida, Springer) の Chapter XI, “Functional Analysis” (W. Rudin, McGraw Hill) Theorem 13.30 など.）

[4] （自己共役作用素に対する functional calculus）自己共役作用素 h に対し，h のスペクトル上の Borel 関数 fに対し，$f(h)$ が，$f(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda$で定まる．$f$が有界関数であれば，$f(h)$ も有界作用素である．

（たとえば,「関数解析 III」（伊藤清三，岩波講座基礎数学）の 11 章 4 節,「関数解析」（黒田成俊，共立数学講座 15）の 12 章 5 節 — ただし fが連続の場合のみ —，“Functional Analysis” (K. Yosida, Springer) の Chapter XI, section 12 “Functional Analysis” (W. Rudin, McGraw Hill) Theorem 13.24 などを見よ.）

[5] （作用素の正値性）H上の有界線型作用素 x について，以下の条件は同値である．これらが満たされるとき，x は正であるといい，$x \geq 0$ と書く．

(1) $(x\xi, \xi) \geq 0, \qquad \forall \xi \in H.$
(2) $x = x^*$かつ x のスペクトルは $[0, \infty)$ に含まれる．
(3) $x = y^*y$なる $y \in B(H)$ が存在する．

（[T1] Theorem I.6.1, “Functional Analysis” (W. Rudin, McGraw Hill) Theorems 12.32, 12.33.）

自己共役作用素 x, yに対し，$x - y \geq 0$ のとき，$x \geq y$とかく．このとき，任意の $z \in B(H)$ に対し，$z^*xz \geq z^*yz$である．

[6] von Neumann 環 Mの任意の元は，M内の unitary 4 個の 1 次結合で書ける.（$u \in B(H)$ が unitary とは，$u^*u = uu^* = 1$ を満たすことである．$u^*u = 1$ だけなら isometry と言われる.）（[T1] Proposition I.4,9, [UHO] 補題 3.18.）この事と，[3] の一意性より，$h \in M$の時, h のスペクトル分解に現われる spectral projection E_λは Mに属することがわかる．

[7] （極分解，polar decomposition）$x \in B(H)$ に対し，$x = u|x|$ という極分解ができる．ここで，$|x| = (x^*x)^{1/2}$, u は $|x|\xi \mapsto x\xi$で定まり，$\{|x|\xi\}^\perp$上で 0 となる partial isometry である.（u が partial isometry であるとは，H_1上で isometry，H_2上で 0 となるような分解 $H = H_1 \oplus H_2$が取れることである．u^*u, uu^*が projection であること，と言っても同じである.）x が von Neumann 環 Mに属していれば上の $u, |x|$ も Mに属している.（[UHO] 定理 1.8, page 97.）

[8] （II_1 factor の定義と例）

行列環の増大列 $M_2(\mathbf{C}) \subset M_2(\mathbf{C}) \otimes M_2(\mathbf{C}) \subset M_2(\mathbf{C}) \otimes M_2(\mathbf{C}) \otimes M_2(\mathbf{C}) \subset \cdots$ を $x \mapsto x \otimes 1$ という埋込みで定める．また，$\tau(x)$ を行列としての $\mathrm{Tr}(x)$ を x のサイズで割ったものと定めれば，この$\tau(x)$ は，埋込みと compatible で，増大列の union A 上の linear functional τを定める．次に，A 上の内積 $(x, y) = \tau(y^*x)$ によって，A を完備化した Hilbert 空間を $L^2(A)$ と書けば，A は $L^2(A)$ 上に，左掛け算で作用する．この表現による A の像の弱閉包を Mと おく．すると，M上の，trace τが$\tau(x) = (x\hat{1}, \hat{1})$ によって次の条件を満たすように定まる．ただし，$\hat{1}$は，$1 \in A$ を $L^2(A)$ の元と見なしたものである.（これらの条件を満たす linear functional は，(normalized faithful normal) trace と言われる.）

(1) $\tau(x^*x) \geq 0.$
(2) $\tau(x^*x) = 0$ iff $x = 0.$

(3) $\tau(xy) = \tau(yx)$.
(4) $\tau(1) = 1$.
(5) τは，σ-weakly continuous.

またM上の(1)〜(5)を満たすlinear functionalは，上で作ったτに限ることもわかる．このように，von Neumann環M上に，traceが一意的に存在するとき，MはII$_1$ factorと言われる．一般に，II$_1$ factor Mのcenter $M \cap M'$は，$\mathbf{C}$である．また，この作り方では，M内に，有限次元環の増大列があり，そのunionは，weakly denseになっている．このようなII$_1$ factorをAFD (approximately finite dimensional)と言う．（この条件は，hyperfiniteとも言われる．）

[9]（M上のσ-weakly continuous functionalの決定）von Neumann環M上のσ-weakly（あるいはσ-strongly）continuousなlinear functional φは，$\xi,\eta_n \in H$で$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|\eta_n\|^2 < \infty$となるものにより，$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x\xi_n, \eta_n)$と表される．([T1] Theorem II.2.6, [UHO] 定理4.6.）

[10]（trace class operator）$B(H)$の元xに対し，$\mathrm{Tr}(|x|) = \sum_{n=1}^{\infty} (|x|\xi_n, \xi_n)$とおく．ここで，$\{\xi_n\}_n$は$H$の完全正規直交系であり，右辺は，$\{\xi_n\}_n$の取り方にはよらない．この値が有限であるとき，$x$はtrace classであるといわれ，$\mathrm{Tr}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x\xi_n, \xi_n)$も定まる．Trace classであるような$x$に対し，$\|x\|_1 = \mathrm{Tr}(|x|)$とおくと，trace class operator全体は，このnormでBanach空間$T(H)$になる．これは，H上のcompact operator全体$K(H)$のdual spaceであり，$T(H)$のdual spaceは，$B(H)$となる．([T1] Chapter II, Section 1, [UHO] 2章4節，定理2.18, 2.20.）

[11]（Hahn-Banachの定理の幾何学形）
Kを実norm空間Xの閉凸集合とし，$x_0 \notin K$とする．このとき$f \in X^*$が存在して，$\sup_{x \in K} f(x) < f(x_0)$となる．
たとえば,「関数解析II」（藤田宏，伊藤清三，岩波基礎数学講座）定理8.16, “Functional Analysis” (W. Rudin, McGraw Hill) Theorem 3.4などを見よ．

[12]（Banach-Alaogluの定理）Norm空間Xのdual space X^*の単位球はweak $*$ compactである．
たとえば“Functional Analysis” (W. Rudin, McGraw Hill) Theorem 3.15を見よ．

[13]（predual）von Neumann環Mに対，M上，ultraweakly continuousなlinear functional全体をM_*と書く．するとこれはBanach空間になり，$(M_*)^* = M$である．また，Mのσ-weak topologyは，$(M_*)^*$としてのweak $*$ topologyに一致する．([T1] Chapter III, Section 2, [UHO] 定理4.10.）

[14]（Kaplanskyのdensity theorem）Mを$B(H)$の$*$-部分環とする．xがMの弱閉包に入っていれば，M内のnet x_iで，$\|x_i\| \leq \|x\|$, $x_i \to x$ (strongly)となるものが存在する．([T1] Theorem II.4.8, [UHO] 定理4.22.）

[15]（GNS-表現）II$_1$ factor Mとその上のtrace τを取る．Mの$L^2(M,\tau)$上への表現πが作れ，$\pi(M)$はvon Neumann環となり，π, π^{-1}は，ともにσ-weakly continuousとなる．([T1] Theorem I.9.14, Corollary 3.10.）

[16]（Radon-Nikodym型定理）II$_1$ factor Mとその上のtrace τ, $\varphi \in M_*$に対し，$\varphi(x^*x) \leq \tau(x^*x)$がすべての$x \in M$に対して成り立てば，$0 \leq a \leq 1$を満たす$a \in M$が存在して，$\varphi(x) = \tau(ax)$と書ける．([UHO] 定理6.7.）

[17] （II_1 factor における projection の比較）II_1 factor Mとその上の trace τを取る．M内の projection e, fに対し，$u^*u = e, uu^* = f$となる partial isometry u が M内に取れるとき，$e \sim f$と書く．これは，同値関係である．また，$e \sim f_1$, $f_1 \leq f$となる projection $f \in M$が取れるとき，$e \prec f$と書く．$e \prec f$, $f \prec e$であれば，$e \sim f$ である．([T1] Proposition V.1.3, [UHO] 定理 4.41.）任意の projection $e, f \in M$に対し，以下の 3 つのうちの一つが成り立つ．

(1) $e \prec f$, $e \not\sim f$.
(2) $e \sim f$.
(3) $f \prec e$, $e \not\sim f$.

また，上の (1), (2), (3) は，それぞれ$\tau(e) < \tau(f)$, $\tau(e) = \tau(f)$, $\tau(e) > \tau(f)$ と同値である．([T1] Chapter V, Sections 1,2, [UHO] 定理 4.45.）

[18] （conditional expectation）II_1 factor Mとその上の trace τ，Mの部分 von Neumann 環 Nに対し，conditional expectation と呼ばれる Mから Nへの次の条件を満たす線型写像が一意的に存在する．

(1) $\tau(xy) = \tau(E(x)y), \qquad x \in M, y \in N.$
(2) $E(x^*x) \geq 0, \qquad x \in M.$
(3) $E(axb) = aE(x)b, \qquad a, b \in N, x \in M.$
(4) Eは，σ-weakly continuous.

（[T1] Proposition V.2.36, [UHO] 定理 6.24.）

[19] II_1 factor Mとその von Neumann 部分環 N, $x \in M$に対し，$K(x)$ を $\{uxu^* \mid u$は Nの unitary$\}$ とし，さらに$\tilde{K}(x)$をそのσ-weak closure とする．すると，$\tilde{K}(x) \cap N' \cap M = E_{N' \cap M}(x)$ である．([T2] 補題 VII.2.5.）

作用素環論の一般的教科書

[BR] O. Bratteli & D. W. Robinson, Operator algebras and quantum statistical mechanics I, II, Springer, 1979.
[D1] J. Dixmier, Les C^*-algébres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1969.
[D2] J. Dixmier, Les algébres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, 1969.
[KR] R. Kadison & J. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras I, II, Academic Press, 1986.
[P] G. K. Pedersen, C^*-algebras and their automorphism groups, London Mathematical Society Monographs, Vol. 14, Academic Press, London, 1979.
[S] S. Sakai, C^*-algebras and W^*-algebras, Springer Verlag, 1971.
[St] Ş. Strătilă, Modular Theory in Operator Algebras, Editura Academiei and Abacus Press, Tunbridge Wells, 1981.
[SZ] Ş. Strătilă & L. Zsidó, Lectures on von Neumann algebras, Editura Academiei and Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.
[T1] M. Takesaki, Theory of operator algebras I, Springer, Berlin, 1979.
[T2] M. Takesaki, 作用素環の構造, 岩波書店，1983.
[T3] M. Takesaki, Theory of operator algebras II, Springer, in preparation.
[UOH] H. Umegaki, M. Ohya, & F. Hiai, 作用素代数入門, 共立出版，1985.