1996 年度解析学 VII・関数解析学・演習問題

6/19/1996

河東泰之

[32] 次の行列を Hilbert 空間 $\mathbf{C}^3$から $\mathbf{C}^3$への作用素と思ったときの norm を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[33] Hilbert 空間 ℓ^2の元, $x = (x_n)$ に対し, $(Tx)_n = c_n x_{n+1}$とはたらく作用素 Tを考える. ただし, ここで (c_n) は有界な複素数列である. いつ, この Tが compact 作用素になるか答えよ.

[34] 任意の $L^1(\mathbf{R})$ の元 $f(x)$ に対し, $L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 $T_f : g \mapsto f * g$, $(g \in L^2(\mathbf{R}))$ を考える. これは常に compact operator であるか？理由をつけて答えよ.

[35] Tを Banach 空間 Xから Banach 空間 Yへの compact operator とする. TXが, Yの閉部分空間であれば, TXは, 有限次元であることを示せ.

[36] 反射的（reflexive）Banach 空間 Xから Banach 空間 Yへの compact operator Tに対し, $\|Tx\| = \|T\|$ となる $x \in X$で, $\|x\| = 1$ となるものが存在することを示せ.

[37] 可分な無限次元 Hilbert 空間 H上の compact operator 全体のなす Banach 空間を $K(H)$ とする. この $K(H)$ は, 可分であることを示せ.