## 2.8 条件付き極値問題

- $U \subset \boldsymbol{R}^n$ を開集合とし、$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ の座標を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ で与える。$C^2$ 級関数 $f : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ について、$Df \neq \boldsymbol{0}$ とする。曲線 $\{\vec{x}(t)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ が $\mathrm{grad}(f) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たせば、$f(\vec{x}(t))$ は一定で、曲線 $\vec{x}(t)$ は $f$ の等位面上にある。

- 【問題】　さらに、$g : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が与えられているとする。$\vec{x}(t)$ が $f$ の等位面上を動くとき、$g$ の差は

$$g(\vec{x}(1)) - g(\vec{x}(0)) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{grad}(g) \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

であるが、$\mathrm{grad}(f) \bullet \vec{v} = 0$ となる等位面に沿うベクトル場 $\vec{v}$ で

$$\mathrm{grad}(g) \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

となるものがある。$\vec{v}$ を等位面上の関数 $g$ の勾配ベクトル場と呼ぶ。このような $\vec{v}$ を求めよ。

- 【解答例】　$\mathrm{grad}(f) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすどのような $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ に対しても

$$(\mathrm{grad}(g) - \vec{v}) \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = 0$$

であるから、

$$\mathrm{grad}(g) - \vec{v} = \lambda\, \mathrm{grad}(f)$$

となる等位面上の関数 $\lambda$ が存在する。$\mathrm{grad}(f)$ との内積をとると

$$\mathrm{grad}(f) \bullet \mathrm{grad}(g) = \lambda\, \|\mathrm{grad}(f)\|^2$$

が得られ、$\lambda = \dfrac{\mathrm{grad}(f) \bullet \mathrm{grad}(g)}{\|\mathrm{grad}(f)\|^2}$ である。ゆえに、

$$\vec{v} = \mathrm{grad}(g) - \frac{\mathrm{grad}(f) \bullet \mathrm{grad}(g)}{\|\mathrm{grad}(f)\|^2}\mathrm{grad}(f)$$

となる。

- $\vec{v}$ は $\mathrm{grad}(g)$ を $\mathrm{grad}(f)$ に直交する $f$ の等位面の接空間に直交射影したものになっている。

- このような $\vec{v}$ は、$f$ の等位面上での $g$ の極値においては、$\vec{v} = \vec{0}$ となる。従って $f$ の等位面上での $g$ の極値を求めるには次のようにすればよい。

- $\mathrm{grad}(g) = \lambda\, \mathrm{grad}(f)$ となる点 $\vec{x}$ を求める。その点での $g(\vec{x})$ が極値かどうか吟味する。

- 考えている $f$ の等位面は $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = c\}$ であるとする。$(\vec{x},\lambda)$ を変数として、$\Phi(\vec{x},\lambda) = g(\vec{x}) - \lambda\big(f(\vec{x}) - c\big)$ いう関数を考えると

$$\mathrm{grad}_{(\vec{x},\lambda)}(\Phi) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}_{\vec{x}}(g) - \lambda\ \mathrm{grad}_{\vec{x}}(f) \\ f(\vec{x}) - c \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が解くべき方程式となる。

$\lambda$ をラグランジュ乗数、この問題の書き換えを**ラグランジュの未定乗数法**と呼ぶ。

- 【問題】　実数 $x$, $y$ が $(x^2-1)^2+y^2=4$ を満たすとき、$xy^2$ の極値を求めよ。

- 【解答例】　$\Phi(x,y,\lambda) = xy^2 - \lambda((x^2-1)^2+y^2-4)$ とおく。

$$\mathrm{grad}\Phi = (y^2 - 4\lambda x(x^2-1), 2xy - 2\lambda y, (x^2-1)^2+y^2-4) = \vec{0}$$

から、　$y^2 = 4\lambda x(x^2-1)$,　$y(x-\lambda)=0$,　$(x^2-1)^2+y^2=4$ を得る。

ここで、$y=0$ とすると、第 1 式から $x=0, \pm 1$ または $\lambda = 0$ である。第 3 式から $\lambda = 0$, $x^2-1=\pm 2$.　ゆえに $(x,y) = (\pm\sqrt{3},0)$, このとき $xy^2=0$ である。

$y \neq 0$ とすると、$\lambda = x$ であり、第 1 式から $y^2 = 4x^2(x^2-1)$, 第 3 式から $(x^2-1)^2 + 4x^2(x^2-1) - 4 = 0$、すなわち $5x^4 - 6x^2 - 3 = 0$ を得る。従って $x^2 = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$、ここで $-$ は不適。$x = \pm\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}$, $y = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18+2\sqrt{6}}$ を得る。$(x,y) = (\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18+2\sqrt{6}})$ で $xy^2 = \dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}$, $(x,y) = (-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18+2\sqrt{6}})$ で $xy^2 = -\dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}$ である。

$\{(x,y) \mid (x^2-1)^2+y^2=4\}$ は原点を中心とする正方形 $[-2,2]\times[-2,2]$ に含まれ、平面内の有界閉集合である。従ってこの上で連続な関数 $xy$ は、最大値最小値を持つ。従って、$(x,y) = (\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18+2\sqrt{6}})$ で、$xy^2$ は最大値 $\dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}$ をとり、$(x,y) = (-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18+2\sqrt{6}})$ で、$xy^2$ は最小値 $-\dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}$ をとる。また、$(x,y) = (\sqrt{3},0)$ で極小値 0 を、$(x,y) = (-\sqrt{3},0)$ で極大値 0 をとる。

- 【問題】　実数 $x$, $y$ が $x^4+y^6=1$ を満たすとき、$xy$ の極値を求めよ。

- 【解答例】　$\Phi(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^4+y^6-1)$ とおく。

$\mathrm{grad}\Phi = (y - 4\lambda x^3, x - 6\lambda y^5, x^4+y^6-1) = \vec{0}$ から、$y = 4\lambda x^3$, $x = 6\lambda y^5$, $x^4+y^6=1$ を得る。

ここで $\lambda = 0$ とすると、第 1 式、第 2 式から $y=0$, $x=0$ となって、これは第 3 式を満たさない。

$\lambda \neq 0$ ならば、第 1 式、第 2 式から $3y^6 = 2x^4$ を得る。第 3 式に代入して $x^4(1+\dfrac{2}{3}) = 1$ を得るから、$x = \pm(\dfrac{3}{5})^{\frac{1}{4}}$, $y = \pm(\dfrac{2}{5})^{\frac{1}{6}}$ を得る。さて、$\pm((\dfrac{3}{5})^{\frac{1}{4}}, (\dfrac{2}{5})^{\frac{1}{6}})$ では $xy = (\dfrac{3}{5})^{\frac{1}{4}}(\dfrac{2}{5})^{\frac{1}{6}}$, $\pm(-(\dfrac{3}{5})^{\frac{1}{4}}, (\dfrac{2}{5})^{\frac{1}{6}})$ では $xy = -(\dfrac{3}{5})^{\frac{1}{4}}(\dfrac{2}{5})^{\frac{1}{6}}$ である。$\{(x,y) \mid x^4+y^6=1\}$ は原点を中心とする半径 1 の円板に含まれ、平面内の有界閉集合である。従ってこの上で連続な関数 $xy$ は、最大値最小値を持つ。

従って、$xy$ は、$\pm((\frac{3}{5})^{\frac{1}{4}},(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}})$ において最大値 $(\frac{3}{5})^{\frac{1}{4}}(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}}$ をとり、$\pm(-(\frac{3}{5})^{\frac{1}{4}},(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}})$ において最小値 $-(\frac{3}{5})^{\frac{1}{4}}(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}}$ をとる。

- 【問題】 $a, b, c$ を正実数とする。$x, y, z$ が、$ax^2+by^2+cz^2=1$ を満たすとき、$xyz$ の最大値最小値を求めよ。

- 【解答例】 $\Phi(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda(ax^2+by^2+cz^2-1)$ とおく。
$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=yz-2a\lambda x=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=zx-2b\lambda y=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=xy-2c\lambda z=0,$
$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=ax^2+by^2+cz^2-1=0$ を満たす $x, y, z, \lambda$ を求める。
$x, y, z$ の一つが 0 とすると上の 3 つの式から、$x=y=z=0$ を得るが、これは第 4 の式を満たさない。従って、$\lambda\neq 0$ で、$a=\frac{yz}{2\lambda x}, b=\frac{zx}{2\lambda y}, c=\frac{xy}{2\lambda z}$ を満たす。これを第 4 式に代入して、$\frac{3xyz}{2\lambda}-1=0$, すなわち $xyz=\frac{2\lambda}{3}$ を得る。従って、$a=\frac{1}{3x^2}$, $b=\frac{1}{3y^2}$, $c=\frac{1}{2z^2}$ を満たし、$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3a}}$, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3b}}$, $z=\pm\frac{1}{\sqrt{3c}}$, を得る。このとき、$xyz=\pm\frac{1}{3\sqrt{3abc}}$ である。$ax^2+by^2+cz^2=1$ を満たす $(x,y,z)$ は有界閉集合をなすから、その上で最大値最小値をとる。従って、$(\pm\frac{1}{\sqrt{3a}},\pm\frac{1}{\sqrt{3b}},\pm\frac{1}{\sqrt{3c}})$ の符号が $---$, $-++$, $+-+$, $++-$ の時、最小値 $-\frac{1}{3\sqrt{3abc}}$ をとり、符号が $+++$, $+--$, $-+-$, $--+$ の時、最大値 $\frac{1}{3\sqrt{3abc}}$ をとる。

- おはなし

  効用関数 (utility function) とは、満足度を数量の関数としたもの。

  単調増加その点の傾きが (Marginal utility)。

  限界効用逓減の法則 (law of diminishing marginal utility)（各変数について上に凸）が満たされている

  ２変数の場合、等高線を無差別曲線と呼ぶ。その曲線の勾配を限界代替率 (Marginal Rate of Substitution) と呼ぶ。

  価格は変数の正の線型結合であることが多い。

- 【問題】 $a>0, b>0, c>0$ とする。$ax+by+cz=1$ を満たす $(x,y,z)$ に対し、$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{r}}$ の最大値を求めよ。

- 【解答例】 $\Phi(x,y,z,\lambda)=x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{r}}-\lambda(ax+by+cz-1)$ について、

$$\mathrm{grad}(\Phi)=\begin{pmatrix}\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}y^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{r}}-\lambda a\\ \frac{1}{q}x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}-1}z^{\frac{1}{r}}-\lambda b\\ \frac{1}{r}x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{r}-1}-\lambda c\\ ax+by+cz-1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$\lambda pxa = \lambda qyb = \lambda rzc$ だから、$y = \frac{pa}{qb}x$, $z = \frac{pa}{rc}x$ である。$a(1+\frac{p}{q}+\frac{p}{r})x = 1$ だから、$x = \frac{1}{a}\frac{qr}{pq+qr+pr}$, $y = \frac{1}{b}\frac{pr}{pq+qr+pr}$, $z = \frac{1}{c}\frac{pq}{pq+qr+pr}$ である。上に凸の関数だから、この値のときに最大値をとる。最大値は $\frac{1}{a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}c^{\frac{1}{r}}}\frac{p^{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}q^{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{(pq+qr+pr)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}}$

- 【問題】　$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする。$ax + by + cz = 1$ を満たす $(x, y, z)$ に対し、$\frac{1}{p}\log x + \frac{1}{q}\log y + \frac{1}{r}\log x$ の最大値を求めよ。(等位線は同じであるから前問と同じ点で最大となり、最大値は前問の最大値の対数となるはずである。)

- 【解答例】　$\Psi(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{p}\log x + \frac{1}{q}\log y + \frac{1}{r}\log x - \lambda(ax + by + cz - 1)$ について、

$$\mathrm{grad}(\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{px} - \lambda a \\ \frac{1}{qy} - \lambda b \\ \frac{1}{rz} - \lambda c \\ ax + by + cz - 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\lambda pxa = \lambda qyb = \lambda rzc = 1$ だから、$y = \frac{pa}{qb}x$, $z = \frac{pa}{rc}x$ である。$a(1+\frac{p}{q}+\frac{p}{r})x = 1$ だから、$x = \frac{1}{a}\frac{qr}{pq+qr+pr}$, $y = \frac{1}{b}\frac{pr}{pq+qr+pr}$, $z = \frac{1}{c}\frac{pq}{pq+qr+pr}$ である。上に凸の関数だから、この値のときに最大値をとる。最大値は

$$-\frac{1}{p}\log a - \frac{1}{q}\log b - \frac{1}{r}\log c + (\frac{1}{q}+\frac{1}{r})\log p + (\frac{1}{p}+\frac{1}{r})\log q + (\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\log r \\ -(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})\log(pq+qr+pr)$$

- $\vec{F} : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ が与えられ、$\vec{F}^{-1}(\vec{0})$ 上で、$D\vec{F}$ のランクは $m$ であるとする。さらに、$g : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が与えられているとする。$\vec{x}(t)$ が $\vec{F}^{-1}(\vec{0})$ 上を動くとき、$g$ の差は

$$g(\vec{x}(1)) - g(\vec{x}(0)) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{grad}(g) \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

であるが、$(D\vec{F})\vec{v} = 0$ となる接空間に沿うベクトル場 $\vec{v}$ で

$$\mathrm{grad}(g) \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

となるものがある。$\vec{v}$ を等位面上の関数 $g$ の勾配ベクトル場と呼ぶ。

- このような $\vec{v}$ は、次のように計算される。${}^t(D\vec{F})$ の列ベクトルが $\vec{F}^{-1}(\vec{0})$ の法空間を張っているから、$\mathrm{grad}(g) - \vec{v}$ はそれらの一次結合である。

$${}^t(D\vec{F})\vec{\lambda} = \mathrm{grad}(g) - \vec{v}$$

$(D\overrightarrow{F})^t(D\overrightarrow{F})\overrightarrow{\lambda} = (D\overrightarrow{F})\mathrm{grad}(g)$ だから、$\lambda = ((D\overrightarrow{F})^t(D\overrightarrow{F}))^{-1}(D\overrightarrow{F})\mathrm{grad}(g)$ であり、

$$\overrightarrow{v} = \mathrm{grad}(g) - {}^t(D\overrightarrow{F})((D\overrightarrow{F})^t(D\overrightarrow{F}))^{-1}(D\overrightarrow{F})\mathrm{grad}(g)$$

となる。

- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ となる点は、${}^t(D\overrightarrow{F})\overrightarrow{\lambda} = \mathrm{grad}(g)$ となる点である。

  $\Phi(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = g(x_1,\dots,x_n) - \lambda_1 f_1(x_1,\dots,x_n) - \cdots - \lambda_m f_m(x_1,\dots,x_n)$

  とおくと、$\mathrm{grad}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda})}\Phi = \overrightarrow{0}$ を満たす点を求めれば、その中に $g$ の $\overrightarrow{F}^{-1}(\overrightarrow{0})$ 上での極値をとる点が含まれる。これが、余次元が $m$ の曲面上での極値を求めるための、ラグランジュの未定乗数法である。

## 2.9 積分

- 多変数関数 $f$ の積分を考えるには、$f = \max\{f, 0\} - \max\{-f, 0\}$ とすることにより、非負の関数の積分を考えればよい。

- これは、非負の関数のグラフが定める図形の体積を考えることである。

- 体積の定まる図形を可測集合と呼ぶが、可測集合の定め方には、ジョルダンの方法、ルベーグの方法などがある。リーマン積分と相性が良いのはジョルダンの方法である。

- $A \subset \boldsymbol{R}^n$ の体積は、直方体の体積を用いて次のように考える。

  $A$ に含まれる互いに交わらない有限個の直方体の和集合の体積の上限と、内部が互いに交わらない有限個直方体の和集合で $A$ を含むもの体積の下限が一致するとき、その値を体積と呼ぶ。

- 積分は、直方体の和集合のメッシュを細かくしていき、直方体の体積を関数の値倍したものの和の極限として定義される。

- $A \subset \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$ が体積を持つとき、$A \cap \{\vec{x}\} \times \boldsymbol{R}^n$ が $n$ 次元の体積を持つような $\vec{x}$ の集合 $A_1$ は体積を持ち、$\displaystyle\int_{A_1} \mathrm{vol}_{\boldsymbol{R}^n}(A \cap (\{\vec{x}\} \times \boldsymbol{R}^n))\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{vol}_{\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n}(A)$ となる。これをフビニの定理と呼ぶ。このことから、積分が存在する関数に対し重積分と累次積分が一致することが示される。

- 累次積分にすれば、1 変数の積分の方法により様々な計算が可能になる。変数変換をして累次積分ができる形にしていくことが様々な形で行われてきた。

- 上の体積は、有界な図形でなくとも定義される。直方体の数を増やしていけば、正実数の集合の上限を議論している。また、級数として考えれば、級数の絶対収束を議論していることになる。従って、広義積分の収束については、有界な領域上の積分が存在して収束する場合を議論していることと同じになる。

## 2.10 積分の変数変換

- $n$ 次元ユークリッド空間の点 $\vec{x}$ に対し、平面の点 $\vec{y}(\vec{x})$ を対応させる写像の偏微分から作ったヤコビ行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ について、

$$\begin{pmatrix} y_1(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\vec{x}, \vec{v}) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(\vec{x}, \vec{v}) \end{pmatrix}$$

だから、$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix} \neq 0$ ならば、$\vec{x}$ 座標における小さな直方体 $[x_1, x_1+v_1]\times\cdots\times[x_n, x_n+v_n]$ は、$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$ に平行な辺を持つ平行 $2n$ 面体に近い図形に写されるが、この平行 $2n$ 面体の体積は $\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix} v_1\cdots v_n$ となる。この性質を良く考えて次の積分の変数変換の公式が得られる。

- 【定理】　$n$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の点 $\vec{x}$ に対し、平面の点 $\vec{y}(\vec{x})$ を対応させる連続微分可能写像が $\boldsymbol{R}^n$ の有界領域 $A$ を $\boldsymbol{R}^n$ の有界領域 $B$ に写し、これが逆写像をもつとする。$\boldsymbol{R}^n$ 上の（または領域 $B$ の閉包上の）連続関数 $f(\vec{y})$ に対し、積分の間の次の等式が成立する。

$$\int_B f(\vec{y})\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n = \int_A f(\vec{y}(\vec{x}))\left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

- $\vec{y}(\vec{x})$ が 2 回連続微分可能としたときのこの定理の証明の要点を見ておこう。

- $\vec{y}(\vec{x})$ に対し、ベクトル $\vec{v}$ 方向の直線 $\vec{x}+t\vec{v}$ において、

$$y_j(\vec{x}+t\vec{v}) = y_j(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n v_i\int_0^t \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x}+s\vec{v})\mathrm{d}s$$

この右辺は次のように変形される。

$$y_j(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n tv_i\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x}) + \sum v_i\int_0^t \big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x}+s\vec{v}) - \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x})\big)\mathrm{d}s$$

$y_j(\vec{x})$ の 2 階微分 $\dfrac{\partial^2 y_j}{\partial x_i\partial x_k}$ の絶対値が $M$ 以下ならば、

$$\big|\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x}+s\vec{v}) - \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x})\big| \leqq \sqrt{n}Ms\|\vec{v}\|$$

となる。従って、

$$y_j(\vec{x}+t\vec{v}) = y_j(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n tv_i\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x}) + \varepsilon_j(\vec{x}, t\vec{v})$$

について、

$$|\varepsilon_j(\vec{x}, t\vec{v})| \leqq \sum_{i=1}^{n} |v_i| \int_0^t \sqrt{n} M s \|\vec{v}\| \mathrm{d}s \leqq \frac{n}{2} M \|\vec{v}\|^2 t^2$$

- さて、小直 $2n$ 面体の像が、平行 $2n$ 面体に近いということを定式化する。$A$ は 1 辺の長さが $L$ の正 $2n$ 面体に含まれる。十分大きな自然数 $N$ をとって、一辺の長さが $\dfrac{2}{N}$ の正 $2n$ 面体の網をかけ、多くとも $\dfrac{L^n N^n}{2^n}$ 個の小正 $2n$ 面体に分割する。各小正 $2n$ 面体の中心 $\vec{q}^{\,m}$ から出るベクトル $\vec{v}$ の方向の直線 $\vec{q}^{\,m} + t\vec{v}$ について

$$\begin{pmatrix} y_1(\vec{q}^{\,m} + t\vec{v}) \\ \vdots \\ y_n(\vec{q}^{\,m} + t\vec{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\vec{q}^{\,m}) \\ \vdots \\ y_n(\vec{q}^{\,m}) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} v_i t \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}_{(\vec{q}^{\,m})} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\vec{q}^{\,m}, t\vec{v}) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(\vec{q}^{\,m}, t\vec{v}) \end{pmatrix}$$

$|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|$ は、$A$ 上で $y_i$ の 2 階微分の絶対値が $M$ 以下であるとすると、それぞれ、$\dfrac{n}{2} M \|\vec{v}\|^2 t^2$ 以下であるから、

$$\|\vec{\varepsilon}\| \leqq \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2} M \|\vec{v}\|^2 t^2$$

となる。小正 $2n$ 面体上では $\|\vec{v}\|^2 t^2 \leqq \dfrac{n}{N^2}$ である。小正 $2n$ 面体 $[q_1^{(m)} - \dfrac{1}{N}, q_1^{(m)} + \dfrac{1}{N}] \times \cdots \times [q_n^{(m)} - \dfrac{1}{N}, q_n^{(m)} + \dfrac{1}{N}]$ の $\vec{y}(\vec{q}^{\,m}) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{x} - \vec{q}^{\,m})$ による像の小平行 $2n$ 面体を考える。小正 $2n$ 面体の像と小平行 $2n$ 面体の位置関係を考えると、上の評価式から、小正 $2n$ 面体の面の像は小平行 $2n$ 面体の面から距離 $\dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{2} Mn \dfrac{1}{N^2}$ 以下にあることがわかる。

- 小平行 $2n$ 面体の辺の長さは $\dfrac{2}{N}\left( (\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i})^2 + \cdots + (\dfrac{\partial y_n}{\partial x_i})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ である。次のように $A$ 上で $u, v$ の偏微分の絶対値の大きさを評価しておく。

$$|\frac{\partial y_j}{\partial x_i}| \leqq K$$

そうすると小平行 $2n$ 面体の辺の長さはともに $\dfrac{2\sqrt{n}K}{N}$ より小さいと考えてよい。小平行 $2n$ 面体の $n-1$ 次元面の $n-1$ 次元体積は、$(\dfrac{2\sqrt{n}K}{N})^{n-1}$ よりも小さい。

- 小平行 $2n$ 面体から距離が $\dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{2} Mn \dfrac{1}{N^2}$ 以下の点のなす集合から小平行 $2n$ 面体を除いた部分の体積は、1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{n}K}{N}$ の正 $2n$ 面体から距離が $\dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{2} Mn \dfrac{1}{N^2}$ 以下の点のなす集合から正 $2n$ 面体を除いた部分の体積より小さい。

- 従って、小正 $2n$ 面体の像の体積は

$$\frac{2^n}{N^n}|\mathrm{det}J|+(\frac{2\sqrt{n}K}{N}+2\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2})^{n-1}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2}$$

よりも小さい。また、

$$\frac{2^n}{N^n}|\mathrm{det}J|-(\frac{2\sqrt{n}K}{N}+2\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2})^{n-1}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2}$$

より大きい。ここで $J=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$ である。

- 関数 $f(\vec{y})$ の積分は $\max\{f(\vec{y}),0\},-\min\{f(\vec{y}),0\}$ の積分の差として得られるから、負にならない関数 $f(\vec{y})$ だけを考える。

- 関数 $f(\vec{y})$ の積分は、一方で、$B$ を小正 $2n$ 面体に分割して、小正 $2n$ 面体の体積と小正 $2n$ 面体上の $f(\vec{y})$ の最大値または最小値の積の和の極限である。これが定理の左辺を与える。$f(\vec{y})$ の積分は、他方で、$B$ を $A$ の小正 $2n$ 面体の像で分割し、小正 $2n$ 面体の像を小平行 $2n$ 面体に置き換えて考えると、小正 $2n$ 面体の像における $f(\vec{y})$ の最大値と

$$\frac{2^n}{N^n}|\mathrm{det}J|+(\frac{2\sqrt{n}K}{N}+2\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2})^{n-1}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2}$$

の積の $L^nN^n$ 個の和の極限と、小正 $2n$ 面体の像における $f(\vec{y})$ の最小値と

$$\frac{2^n}{N^n}|\mathrm{det}J|-(\frac{2\sqrt{n}K}{N}+2\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2})^{n-1}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2}$$

の積の $L^nN^n$ 個の和の極限にはさまれる実数であるが，分割を細かくすると、$\frac{2^n}{N^n}|\mathrm{det}J|$ と $f(\vec{y})$ の小正 $2n$ 面体の像における最大値または最小値の積の和は、$\int_A f(\vec{y}(\vec{x}))|\mathrm{det}J|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ に収束し、誤差の項は $f(\vec{y})$ の $B$ での最大値を $C$ とすると、小正方形の個数は $\frac{L^nN^n}{2^n}$ 個以下であったから、$(\frac{2\sqrt{n}K}{N}+2\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2})^{n-1}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}Mn\frac{1}{N^2}C\frac{L^nN^n}{2^n}$ よりも小であるが これは $N\longrightarrow\infty$ のとき 0 に収束する。これが定理の右辺を与える。

- $\vec{y}(\vec{x})$ が連続微分可能とするときに、変数変換の公式は $\varepsilon$-$\delta$ 論法で示される。

## 2.11 積分の例

- ガンマ関数、ベータ関数は計算結果を表示するために使われる。また、確率分布を議論するときにも重要になる。

  $x>0$ に対し、$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ と定義する。部分積分により、$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\Gamma(1)=1$ だから、$\Gamma(n+1)=n!$ である。

$x>0,\, y>0$ に対し、$B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ と定義する。

- 【問題】　$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$ を示せ。
-

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}\mathrm{d}s\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}\mathrm{d}t\\&=\int_{\boldsymbol{R}_{\geqq 0}\times\boldsymbol{R}_{\geqq 0}} e^{-s-t}(s+t)^{x+y-1}\frac{s^{x-1}t^{y-1}}{(s+t)^{x+y-1}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ここで $r=s+t\ u=\dfrac{s}{s+t}$ という変数変換を考える。$s=ru,\, t=r(1-u)$ だから、
$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial s}{\partial r} & \dfrac{\partial s}{\partial u}\\ \dfrac{\partial t}{\partial r} & \dfrac{\partial t}{\partial u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & r\\ 1-u & -r\end{pmatrix}$ である。

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}_{\geqq 0}\times\boldsymbol{R}_{\geqq 0}} e^{-s-t}(s+t)^{x+y-1}\frac{s^{x-1}t^{y-1}}{(s+t)^{x+y-1}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\int_{\boldsymbol{R}_{\geqq 0}\times[0,1]} e^{-r}r^{x+y-1}\frac{(ru)^{x-1}(r(1-u))^{y-1}}{r^{x+y-1}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}u\\&=\int_0^\infty e^{-r}r^{x+y-1}\mathrm{d}r\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

ゆえに $\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$.

- $B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ と定義する。ここで $t=\sin^2\theta$ とすると、

$$\mathrm{d}t=2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta$$

これは、$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$ を意味する。

従って、$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(1)B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ から、$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ が得られる。

$\Gamma(\frac{n}{2})$ がわかるのだから、次の積分は計算できていると考える。

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{m-1}(\cos\theta)^{n-1}\mathrm{d}\theta=B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})=\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})}$$

特に

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{m-1}\mathrm{d}\theta=B(\frac{m}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}\sqrt{\pi}$$

- 球面座標、球の体積

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

について、ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

その行列式は $r^2\sin\theta$.

球の体積は、$\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leqq r^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^r r^2\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^2 \pi\mathrm{d}\varphi = \frac{r^3}{3} 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi r^3}{3}$

$n$ 次元球面座標は以下で定義する。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

について、ヤコビ行列は、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial r} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & -rs_1 & 0 & & & \\ s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1s_2c_3 & rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ s_1\cdots s_{n-2}c_{n-1} & rc_1s_2\cdots c_{n-1} & rs_1c_2s_3\cdots c_{n-1} & \cdots & rs_1s_2s_3\cdots c_{n-2}c_{n-1} & -rs_1s_2s_3\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_1\cdots s_{n-2}s_{n-1} & rc_1s_2\cdots s_{n-1} & rs_1c_2s_3\cdots s_{n-1} & \cdots & rs_1s_2s_3\cdots c_{n-2}s_{n-1} & -rs_1s_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}$$

考え直して、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}\cos\theta_{n-1} \\ y_{n-1}\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

について、ヤコビ行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cos\theta_{n-1} & \sin\theta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -y_{n-1}\sin\theta_{n-1} & y_{n-1}\cos\theta_{n-1} \end{pmatrix} J_{n-1}$$

その行列式は $y_{n-1}\mathrm{det}(J_{n-1}) = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\mathrm{det}(J_{n-1})$. 従って帰納的に、$\mathrm{det}(J_n) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}$.

- 半径 $r$ の $n$ 次元球の体積は、

$$\int_{\|\vec{x}\|^2\leqq r^2} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_0^r r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1\mathrm{d}\theta_1\cdots\int_0^\pi \sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_{n-1}$$

ここで $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n\theta\mathrm{d}\theta$ については、部分積分をして

$$I_n = [\sin^{n-1}\theta(-\cos\theta)]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 0 + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

ゆえに $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ となることを使うか、ベータ関数を用いて計算できる。

$$\begin{aligned}
&\int_{\|\vec{x}\|^2\leqq r^2} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_0^r r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1\mathrm{d}\theta_1\cdots\int_0^\pi \sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_{n-1} \\
&= \frac{r^n}{n}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sqrt{\pi}\cdots\frac{\Gamma(\frac{2}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\sqrt{\pi}\cdot 2\pi \\
&= \frac{2r^n}{n}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = r^n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}
\end{aligned}$$

- この値を $r$ で微分した $2r^{n-1}\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ は $n-1$ 次元球面の面積である。

- ベータ関数は区間 $[0,1]$ 上の分布 $\dfrac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{B(x,y)}$ を与えている。

- $n$ 次元の単体 $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n \mid x_1\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0, x_1+\cdots+x_n\leqq 1\}$ 上で、$x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}$ を考えると、

  $$B(p_0,p_1,\ldots,p_n)=\int_{\substack{x_1\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0,\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

  として、

  $$\frac{x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}}{B(p_0,p_1,\ldots,p_n)}$$

  が考えられ、ディリクレの分布と呼ばれる。

  $$\begin{aligned}B(p_0,p_1,\ldots,p_n)&=\int_{\substack{x_1\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0,\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\ &=\frac{\Gamma(p_0)\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_0+p_1+\cdots+p_n)}\end{aligned}$$

  であることが示される。

- この計算のために立方体から単体への写像を考える。

  $$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1(1-u_2)\\ u_1u_2(1-u_3)\\ \vdots\\ u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n)\\ u_1u_2\cdots u_n\end{pmatrix}$$

  ヤコビ行列は

  $$\begin{pmatrix} 1-u_2 & -u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ u_2(1-u_3) & u_1(1-u_3) & -u_1u_2 & 0 & \cdots & 0\\ u_2u_3(1-u_4) & u_1u_3(1-u_4) & u_1u_2(1-u_4) & -u_1u_2u_3 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \ddots & \vdots\\ u_2u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & & & & & -u_1u_2\cdots u_{n-1}\\ u_2u_3\cdots u_{n-1}u_n & & & & & u_1u_2\cdots u_{n-1}\end{pmatrix}$$

  $n-1$ 次元のときを考えると

  $$\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_{n-1}\\ u_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1(1-u_2)\\ u_1u_2(1-u_3)\\ \vdots\\ u_1u_2\cdots u_{n-1}\\ u_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}(1-u_n)\\ y_{n-1}u_n\end{pmatrix}$$

であり、ヤコビ行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-u_n & -y_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n & y_{n-1} \end{pmatrix} J_{n-1}$$

ヤコビ行列式は、$u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \det(J_{n-1})$ だから、

$$u_1{}^{n-1} u_2{}^{n-2} \cdots u_{n-2}{}^2 u_{n-1}$$

である。

$$\begin{aligned}
&B(p_0, p_1, \ldots, p_n) \\
&= \int_{\substack{x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, \\ x_1 + \cdots + x_n \leqq 1}} x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - \cdots - x_n)^{p_0-1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{[0,1]^n} (u_1(1-u_2))^{p_1-1} (u_1 u_2 (1-u_3))^{p_2-1} \cdots (u_1 u_2 \cdots u_{n-1}(1-u_n))^{p_{n-1}-1} \\
&\qquad (u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n)^{p_n-1} (1-u_1)^{p_0-1} u_1{}^{n-1} u_2{}^{n-2} \cdots u_{n-2}{}^2 u_{n-1} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \int_{[0,1]^n} u_1{}^{p_1-1+p_2-1+\cdots+p_n-1+n-1} (1-u_1)^{p_0-1} u_2{}^{p_2-1+\cdots+p_n-1+n-2} (1-u_2)^{p_1-1} \\
&\qquad \cdots u_{n-1}{}^{p_{n-1}-1+p_n-1+1} (1-u_{n-1})^{p_{n-2}-1} u_n{}^{p_n-1} (1-u_n)^{p_{n-1}-1} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \int_{[0,1]^n} u_1{}^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} (1-u_1)^{p_0-1} u_2{}^{p_2+\cdots+p_n-1} (1-u_2)^{p_1-1} \\
&\qquad \cdots u_{n-1}{}^{p_{n-1}+p_n-1-1} (1-u_{n-1})^{p_{n-2}-1} u_n{}^{p_n-1} (1-u_n)^{p_{n-1}-1} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= B(p_1 + \cdots + p_n, p_0) B(p_2 + \cdots + p_n, p_1) \cdots B(p_{n-1} + p_n, p_{n-2}) B(p_n, p_{n-1}) \\
&= \frac{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n)\Gamma(p_0)}{\Gamma(p_0 + p_1 + \cdots + p_n)} \frac{\Gamma(p_2 + \cdots + p_n)\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n)} \cdots \frac{\Gamma(p_{n-1} + p_n)\Gamma(p_{n-2})}{\Gamma(p_{n-2} + p_{n-1} + p_n)} \frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_{n-1} + p_n)} \\
&= \frac{\Gamma(p_0)\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_0 + p_1 + \cdots + p_n)}
\end{aligned}$$

- $\{\overrightarrow{x} \mid |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leqq 1\}$ の体積は、$\{\overrightarrow{x} \mid x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p \leqq 1\}$ の体積の $2^n$ 倍である。

$$\begin{aligned}
&\{\overrightarrow{x} \mid x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_1 + \cdots + x_n \leqq 1\} \\
&\longrightarrow \{\overrightarrow{x} \mid x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p \leqq 1\}
\end{aligned}$$

を各座標を $\dfrac{1}{p}$ 乗する写像とする。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(\{\overrightarrow{x} \mid x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p \leqq 1\}) \\
&= \int_{\substack{x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, \\ x_1 + \cdots + x_n \leqq 1}} \frac{1}{p^n} x_1^{\frac{1}{p}-1} \cdots x_n^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \frac{1}{p^n} B(1, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{p})^n}{p^n \Gamma(1 + \frac{n}{p})}
\end{aligned}$$

ここで $p=2$ として、$2^n$ 倍を考えると $n$ 次元球体の体積は、

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$$

- **ガウス分布**　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ であり、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x=a\sqrt{\pi}$ であり、分散を求めると

$$\begin{aligned}\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\left[(-\frac{a^2x}{2})(e^{-x^2/a^2})\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-\frac{a^2}{2})(e^{-x^2/a^2})\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\frac{a^2}{2}a\sqrt{\pi}=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

従って、$\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ が、標準偏差 $\sigma$ 平均 0 の分布となる。

- さて、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ であることは、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を極座標に変数変換して求める。（あるいは、$\Gamma(\frac{1}{2})$ として求めるが、ここではベータ関数 $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を経由して求めており同じ計算をしている。）

- これが求まると、$\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\exp(-\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\pi^{n/2}$ であることがわかる。ただし、広義積分の変数変換は正値の関数であることを用いる。

- $A=\big(a_{ij}\big)_{i,j=1,\ldots,n}$ を正値対称行列とするとき、

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\exp(-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\mathrm{det}A}}$$

も示される。