２０１７年度微分積分学続論 補足と演習問題　　６月２７日

担当：坪井　俊

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/zokuron2017.html

ラグランジュの未定乗数法の問題

問題１．　a, b, c を正実数とする。x, y, z が、$ax^2+by^2+cz^2=1$ を満たすとき、xyz の最大値最小値を求めよ。

問題２．　$a>0,\ b>0,\ c>0$ とする。$ax+by+cz=1$ を満たす (x,y,z) に対し、$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{r}}$ の最大値を求めよ。ただし $p>0,\ q>0,\ r>0$ とする。

問題３．　$a>0,\ b>0,\ c>0$ とする。$ax+by+cz=1$ を満たす (x,y,z) に対し、$\frac{1}{p}\log x+\frac{1}{q}\log y+\frac{1}{r}\log x$ の最大値を求めよ。ただし $p>0,\ q>0,\ r>0$ とする。
（問題２と等位面は同じ。）

重積分、積分の変数変換の問題

ガンマ関数、ベータ関数　ガンマ関数、ベータ関数は計算結果を表示するために使われる。
$x>0$ に対し、$\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ と定義する。これは正値連続関数の広義積分で収束する。部分積分により、$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \Gamma(1)=1$ だから、$\Gamma(n+1)=n!$ である。
$x>0,\ y>0$ に対し、$B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ と定義する。ここで $t=\sin^2\theta$ とすると、$\mathrm{d}t=2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta,\ B(x,y)=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta.$ これは、$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$ を意味する。

問題４．　$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$ を示せ。
ヒント：第１象限 $\boldsymbol{R}_{\geqq 0}\times\boldsymbol{R}_{\geqq 0}$ 上の関数 $e^{-s}s^{x-1}e^{-t}t^{y-1}$ について、$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ru\\r(1-u)\end{pmatrix}$ という変数変換を考える。

半整数に対するガンマ関数　$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(1)B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ から、$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ が得られる。$\Gamma(\frac{n}{2})$ がわかるのだから、次の積分は計算できていると考える。

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{m-1}(\cos\theta)^{n-1}\mathrm{d}\theta=B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})=\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})}$$

特に　$2\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{m-1}\mathrm{d}\theta=B(\frac{m}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}\sqrt{\pi}.$

n 次元球体の体積　n 次元球面座標 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix}$ は、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}$ で与えられる。このヤコビ行列を直接計算するのは見通しが悪い。そこで、変数変換を帰納的に行う。$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$ とすると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}\cos\theta_{n-1} \\ y_{n-1}\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}$ であるが、$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ のように変数変換をすると考え、ヤコビ行列をチェインルールで計算する。

問題５．　球面座標への変数変換により、半径 r の n 次元球体 $\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leqq r\}$ の体積を求めよ。（$\theta_1 \in [0,\pi]$, $\ldots$, $\theta_{n-2} \in [0,\pi]$, $\theta_{n-1} \in [0,2\pi]$ に注意する。）
これを用いて、$n-1$ 次元球面の体積を求めよ。

ディリクレの分布　ベータ関数は区間 $[0,1]$ 上の確率密度関数 $\dfrac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{B(x,y)}$ を与えている。n 次元の単体 $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_1 \geqq 0,\ldots,x_n \geqq 0, x_1+\cdots+x_n \leqq 1\}$ 上で、$x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}$ を考えると、

$$B(p_0,p_1,\ldots,p_n) = \int_{\substack{x_1\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0,\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

として、確率密度関数 $\dfrac{x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}}{B(p_0,p_1,\ldots,p_n)}$ が考えられ、ディリクレの分布と呼ばれる。

問題６．　次を示せ。

$$\begin{aligned} B(p_0,p_1,\ldots,p_n) &= \int_{\substack{x_1\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0,\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_0-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\ &= \frac{\Gamma(p_0)\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_0+p_1+\cdots+p_n)} \end{aligned}$$

ヒント：立方体から単体への写像 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1-u_2) \\ u_1u_2(1-u_3) \\ \vdots \\ u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n) \\ u_1u_2\cdots u_n \end{pmatrix}$ を考える。写像

を $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1-u_2) \\ u_1u_2(1-u_3) \\ \vdots \\ u_1u_2\cdots u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}(1-u_n) \\ y_{n-1}u_n \end{pmatrix}$ のよう
に分解して、ヤコビ行列をチェインルールで帰納的に計算する。

n 次元単位球体の体積 $\{\vec{x} \mid |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leqq 1\}$ の体積は、
$\{\vec{x} \mid x_1 \geqq 0,\ \ldots, x_n \geqq 0, {x_1}^p + \cdots + {x_n}^p \leqq 1\}$ の体積の 2^n 倍である。

$$\begin{aligned} &\{\vec{x} \mid x_1 \geqq 0,\ \ldots, x_n \geqq 0, x_1 + \cdots + x_n \leqq 1\} \\ &\longrightarrow \{\vec{x} \mid x_1 \geqq 0,\ \ldots, x_n \geqq 0, {x_1}^p + \cdots + {x_n}^p \leqq 1\} \end{aligned}$$

を各座標を $\dfrac{1}{p}$ 乗する写像とする。

問題６． 次を示せ。

$$\mathrm{vol}(\{\vec{x} \mid x_1 \geqq 0,\ \ldots, x_n \geqq 0, {x_1}^p + \cdots + {x_n}^p \leqq 1\}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{p})^n}{p^n \Gamma(1 + \frac{n}{p})}$$

$p = 2$ として、n 次元球体の体積を求めよ。

ガウス分布 $\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ は、標準偏差 σ 平均 0 のガウス分布と呼ばれる。

問題７． (1) 広義積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^n {x_i}^2) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ を $n = 2$ のとき極座標に変数変換して求めよ。それを用いて n が一般のときに求めよ。
(2) $A = \bigl(a_{ij}\bigr)_{i,j=1,\ldots,n}$ を正値対称行列とするとき、広義積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} \exp(-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ を求めよ。