２０１７年度微分積分学続論 補足と演習問題　　６月６日

担当：坪井　俊

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/zokuron2017.html

問題１．　3 次元ユークリッド空間内の図形

$$X = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (16 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4((4x + 3z)^2 + (5y)^2) = 0\}$$

を考える。

(1) X は、有界な図形であることを示せ。
ヒント：X の定義式の左辺を $f(x, y, z)$ とおく。$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ に対し、R が十分大ならば、$f(x, y, z) > 0$ を示せばよい。

(2) X は滑らかな曲面であることを示せ。
ヒント：X 上で $\mathrm{grad}(f) \neq \vec{0}$ を示す。そのために、$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を計算し、$\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$ のときの、R^2 と $P = (4x+3z)^2 + (5y)^2$ の関係式を導く。$f(x, y, z) = (16 + R^2)^2 - 4P = 0$ とこの関係式から、$\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$ と $f(x, y, z) = 0$ は両立しないことを示す。

(3) z を X 上の関数と考えるとき、z の極値を求めよ。
ヒント：$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ から R^2, y についての条件を導き、$f(x, y, z) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と連立させて、極値をとる点を求める。この点のヘッセ行列 $-\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ を計算し、極大極小を判定する。

(4) X と平面 $z = 0$ の共通部分が 2 つの円の和集合であることを確かめよ。
注意。xz 平面上の円周を z 軸の周りに回転させて得られるトーラスに対し、その２重接平面とトーラスの共通部分は、２つの円周の和集合となる。この円周をビラルソーの円周と呼ぶ。

問題２．　$S^2 = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上の高さの関数 z を考える。

(1) S^2 上の S^2 に沿うベクトル場 $\vec{v}_{(x,y,z)}$ で、S^2 に沿う任意のベクトル $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ に対し、$\vec{v} \bullet \vec{w} = w_3$ を満たすものを求めよ。
ヒント：$(x, y, z) \in S^2$ で S^2 に沿うベクトル（接ベクトル）は、$\mathrm{grad}(f)$ との内積が 0 になるものである。

(2) S^2 の球面座標 $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ で $\vec{v}$ を表示せよ。

- $\boldsymbol{R}^n$ 上のベクトル場 $\vec{v}_{(\vec{x})}$ が与えられると、$\boldsymbol{R}^n$ 上の関数 $f(\vec{x})$ の各点におけるベクトル場 $\vec{v}_{(\vec{x})}$ の方向の微分を計算することができる。

$$(\frac{\mathrm{d}f(\vec{x}+t\vec{v}_{(\vec{x})})}{\mathrm{d}t})_{(0)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_k})_{(\vec{x})}v_k(\vec{x}) = (Df)_{(\vec{x})}\vec{v}_{(\vec{x})}$$

これを $\vec{v}(f)$ と書くことがある。$\vec{v}=\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ のように書くと f を $\vec{v}$ の方向に微分することを表すことができる。つまり、$\vec{v}(f)=(\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial}{\partial x_k})f=\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

- ベクトル場は 1 階の偏微分作用素（関数に関数を対応させる関数を作用素と呼ぶ）と同じものである。ライプニッツルール $\vec{v}(fg)=\vec{v}(f)\cdot g+f\cdot\vec{v}(g)$ が（各点 $\vec{x}$ で）成立している。

- $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, V に対し、局所的微分同相写像 $\vec{F}:U\longrightarrow V$ $(\vec{F}(\vec{x})=\vec{y})$ があるとする。U 上のベクトル場 $\vec{v}_{(\vec{x})}$ に対し、V 上のベクトル場 $\vec{F}_*\vec{v}$ が次のように対応する。

(1) $\vec{v}_{(\vec{x})}$ は、$\vec{x}+t\vec{v}_{(\vec{x})}$ の速度ベクトルである。$\vec{F}(\vec{x}+t\vec{v}_{(\vec{x})})$ の速度ベクトル

$$(\frac{\mathrm{d}\vec{F}(\vec{x}+t\vec{v}_{(\vec{x})})}{\mathrm{d}t})_{(0)} = (\sum_{j=1}^{k}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{(\vec{x})}v_j(\vec{x}))_{i=1,\dots,n} = (D\vec{F})_{(\vec{x})}\vec{v}_{(\vec{x})} = (\vec{F}_*\vec{v})_{(\vec{F}(\vec{x}))}.$$

(2) V 上の関数 g に対し、$\vec{v}(g\circ\vec{F})=\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial g}{\partial y_i})_{(\vec{F}(\vec{x}))}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{(\vec{x})}v_j(\vec{x})$

だから、$F_*\vec{v}=\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{(\vec{x})}v_j(\vec{x})\frac{\partial}{\partial y_i}$.

この 2 つの対応は同じベクトル場を与えている。V 上のベクトル場であるから V の座標で書き表すと、$\vec{F}$ の逆写像を $\vec{G}$ として、$(D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))}\vec{v}_{(\vec{G}(\vec{y}))}$,

$\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{(\vec{G}(\vec{y}))}v_j(\vec{G}(\vec{y}))\frac{\partial}{\partial y_i}$ のように計算しなければならない。

問題３． 回転座標系。$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}$, ポテンシャル $U(\vec{x})$ により、運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{u},\quad \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{grad}(U)=-\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_1}\\\frac{\partial U}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

で与えられているとする。運動方程式は $\begin{pmatrix}\vec{x}\\\vec{u}\end{pmatrix}$ 空間上のベクトル場としては、

$$\vec{v}=u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_1}-\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial u_2}$$

である。$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ について、$\vec{x} = R_t \vec{y}$ として、$\vec{w} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}$ とおく。運動方程式を $\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$ 空間上のベクトル場として書き表せ。

問題４． $\vec{0} \in \boldsymbol{R}^n$ の近傍で定義された定数係数２階同次線型微分作用素とは、対称行列 $(b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ により、$\mathcal{B} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ と書かれるものである。すなわち、関数 f に対し、関数 $\mathcal{B}(f) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ が対応する作用素である。

(1) 正則線形写像 A に対し、$f \circ A$ に対する $\vec{0}$ での値を書き表せ。

(2) 直交変換で $\vec{0}$ での値が不変であるような B を求めよ。

問題５． $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$ で与えられる $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, V の間の微分同相写像を考える。ヤコビ行列 $D\vec{F}$ の列ベクトル $(D\vec{F})_{(\vec{x})} \vec{e}_i = (\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i})_{j=1,\dots,n}$ $(i = 1, \dots, n)$ は直交しているとする。このとき、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial y_i}{\partial x_k})^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

を示せ。（従って、ラプラシアンについて、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i,k=1}^{n} (\frac{\partial y_i}{\partial x_k})^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ となる。）

問題６． 円柱座標を考える。すなわち、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan^{-1} \dfrac{y}{x} \\ z \end{pmatrix}$ とする（定義域は逆写像となっているように定める）。

(1) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$ を求めよ。

(3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を円柱座標で表せ。

問題７．　球面座標を考える。すなわち、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$ とする（定義域は逆写像となっているように定める）。

(1) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ の関数として求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ の関数として求めよ。

(3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を球面座標で表せ。