# ２０１７年度微分積分学続論 補足と演習問題　　５月９日

担当：坪井　俊

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/zokuron2017.html

**制限３体問題 (restricted three body problem)**

- 関数の臨界点およびそこでの関数の様子を知りたい問題の例として制限３体問題のポテンシャルがある。

- ニュートンの重力理論の下で、２つの質点だけが与えられると、２つの質点はその重心を原点とする座標系で、原点を焦点とする２次曲線の軌道を（面積測度が一定であるように）運動する。

- $\vec{x}^1, \vec{x}^2$ にある質量 $m_1, m_2$ ２つの質点の運動を記述する問題は２体問題と呼ばれる。それぞれに働く重力は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{(\vec{x}^1)} &= -Gm_1m_2\frac{\vec{x}^1-\vec{x}^2}{\|\vec{x}^1-\vec{x}^2\|^3} = -\mathrm{grad}(-\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{x}-\vec{x}^2\|})_{(\vec{x}^1)}\\
\vec{F}_{(\vec{x}^2)} &= -Gm_1m_2\frac{\vec{x}^2-\vec{x}^1}{\|\vec{x}^2-\vec{x}^1\|^3} = -\mathrm{grad}(-\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{x}-\vec{x}^1\|})_{(\vec{x}^2)}
\end{aligned}
$$

- ２体問題において、$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\dfrac{m_1\vec{x}^1+m_2\vec{x}^2}{m_1+m_2} = \vec{0}$ であるから、質点 $m_1, m_2$ の重心 $\vec{x}^0 = \dfrac{m_1\vec{x}^1+m_2\vec{x}^2}{m_1+m_2}$ は、$\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{x}^0}{\mathrm{d}t^2} = \vec{0}$ を満たし、等速直線運動をする。

- $\vec{x}^1-\vec{x}^0 = \dfrac{m_1\vec{x}^1+m_2\vec{x}^1-m_1\vec{x}^1-m_2\vec{x}^2}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{x}^1-\vec{x}^2)$ だから、運動方程式から、

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\vec{x}^1-\vec{x}^0) &= m_1\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}^1}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{grad}(-\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{x}-\vec{x}^2\|})_{(\vec{x}^1)}\\
&= -\mathrm{grad}(-\frac{Gm_1{m_2}^2}{(m_1+m_2)\|\vec{x}-\vec{x}^0\|})_{(\vec{x}^1)}
\end{aligned}
$$

が得られる。$\vec{x}^2-\vec{x}^0$ についても同様である。

つまり、重心に対する相対位置 $\vec{x}^1-\vec{x}^0, \vec{x}^2-\vec{x}^0$ は、次の運動方程式を満たす。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2(\vec{x}^1-\vec{x}^0)}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{G{m_2}^2}{m_1+m_2}\frac{\vec{x}^1-\vec{x}^0}{\|\vec{x}^1-\vec{x}^0\|^3}\\
\frac{\mathrm{d}^2(\vec{x}^2-\vec{x}^0)}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{G{m_1}^2}{m_1+m_2}\frac{\vec{x}^2-\vec{x}^0}{\|\vec{x}^2-\vec{x}^0\|^3}
\end{aligned}
$$

を満たす。これは、$\vec{x}^0$ に質量 $\dfrac{{m_2}^2}{m_1+m_2}$ あるいは $\dfrac{{m_1}^2}{m_1+m_2}$ の不動の質点があるときの $\vec{x}^1, \vec{x}^2$ にある質点の運動方程式である。

- この不動の質点があるとき、一般には、$\vec{x}^0$ を焦点とする 2 次曲線を軌道とする解となる。特に、不動の質点の周りの円運動をする解が存在する。すなわち、$\vec{x}^0 = \vec{0}$ として、$\vec{x}(t) = R_{\omega t}\vec{x}(0)$ ($R_{\omega t} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $\omega t$ の回転、$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$) とすると、$\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\vec{x}$ となり、次がが成立する。

$$\omega^2 = \frac{G{m_1}^2}{m_1+m_2}\frac{1}{\|\vec{x}^2\|^2} = \frac{G{m_2}^2}{m_1+m_2}\frac{1}{\|\vec{x}^1\|^2}$$

- 長さの単位を変えて、$\|\vec{x}^2 - \vec{x}^1\| = 1$ とする。質量の比を $m_2/m_1 = \mu/(1-\mu)$ とすると、$\|\vec{x}^1\| = \mu$, $\|\vec{x}^2\| = 1-\mu$ である。時間の単位を変えて角速度 $\omega$ を 1 にする。このとき、$1 = G(m_1+m_2)$ であり、$Gm_1 = 1-\mu$, $Gm_2 = \mu$ である。

- 円運動をする解は、$\vec{x}^0 = \vec{0}$ とし、$t = 0$ のとき $x_1$ 軸上にあるとして、

$$\begin{aligned} \vec{x}^1(t) &= -\mu R_t\vec{e}_1 \\ \vec{x}^2(t) &= (1-\mu)R_t\vec{e}_1 \end{aligned}$$

ここで、$\vec{x}$ にある質点 $m$ は、$-\mathrm{grad}(-\dfrac{Gmm_1}{\|\vec{x}-\vec{x}^1(t)\|} - \dfrac{Gmm_2}{\|\vec{x}-\vec{x}^2(t)\|})$ の力を受けるので、運動方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{grad}(-\frac{1-\mu}{\|\vec{x}-\vec{x}^1(t)\|} - \frac{\mu}{\|\vec{x}-\vec{x}^2(t)\|})$$

- $R_t\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$ という座標で円運動をする解を書き直すと、
$\vec{y}^1(t) = -\mu\vec{e}_1$, $\vec{y}^2(t) = (1-\mu)\vec{e}_1$ である。この 2 点は「遠心力」と釣り合っている。$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{aligned} JR_t\vec{y}(t) + R_t\big(\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)} &= \big(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)}, \\ J^2R_t\vec{y}(t) + 2JR_t\big(\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)} + R_t\big(\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2}\big)_{(t)} &= \big(\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}\big)_{(t)} \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} \big(\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2}\big)_{(t)} &= R_{-t}\big(\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}\big)_{(t)} - J^2\vec{y}(t) - 2J\big(\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)} \\ &= -\mathrm{grad}(-\frac{1-\mu}{\|\vec{y}-\vec{y}^1(t)\|} - \frac{\mu}{\|\vec{y}-\vec{y}^2(t)\|}) + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} - 2J\big(\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)} \\ &= -\mathrm{grad}(-\frac{1-\mu}{\|\vec{y}-\mu\vec{e}_1\|} - \frac{\mu}{\|\vec{y}-(1-\mu)\vec{e}_1\|} - \frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{2}) - 2J\big(\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)} \end{aligned}$$

最後の $-2J\big(\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\big)_{(t)}$ はコリオリの力と呼ばれる見かけの力である。

- ここで、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ かつ $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{0}$ を満たす解（$\vec{y}$ の座標で静止した状態が続く点）を探すと、

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1-\mu}{\|\vec{y}+\mu\vec{e}_1\|} + \frac{\mu}{\|\vec{y}-(1-\mu)\vec{e}_1\|} + \frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{2}\right) = \vec{0}$$

となる点である。このような点が５つあり、ラグランジュ点と呼ばれる。

**問題１．**　上の式の左辺をベクトルの形のまま計算し、$y_1y_2$ 平面上の $\mu\vec{e}_1$, $(1-\mu)\vec{e}_1$ を１辺とする正三角形の頂点が、この式を満たしていることを作図により示せ。正三角形解とよぶ。

**問題２．**

(1) 上の式の左辺を成分表示せよ。

(2) $y_3$ 成分が 0 になるのは、$y_3 = 0$ のときだけである。

(3) $y_1y_2$ 平面上での成分表示を求めよ。

(4) $y_1y_2$ 平面上で $y_2$ 成分が 0 になるのは、$y_2 = 0$ または、

$$-\frac{1-\mu}{((y_1+\mu)^2+{y_2}^2)^{3/2}} - \frac{\mu}{((y_1-(1-\mu))^2+{y_2}^2)^{3/2}} + 1 = 0$$

のときであり、後者は、$(-\mu, 0)$, $(1-\mu, 0)$ への距離がともに 1 未満の点では 0 にならないことを示せ。

(5) $y_1y_2$ 平面上で $y_1$ 軸上の区間 $[-\mu, 1-\mu]$ からの距離が増加すると、$-\dfrac{1-\mu}{((y_1+\mu)^2+{y_2}^2)^{3/2}} - \dfrac{\mu}{((y_1-(1-\mu))^2+{y_2}^2)^{3/2}} + 1$ の値は単調に増加することを示せ。

(6) $(y_1, y_2)$ が $-\dfrac{1-\mu}{((y_1+\mu)^2+{y_2}^2)^{3/2}} - \dfrac{\mu}{((y_1-(1-\mu))^2+{y_2}^2)^{3/2}} + 1 = 0$ をみたすとき、$y_1$ 成分は、

$$-\frac{(1-\mu)}{((y_1+\mu)^2+{y_2}^2)^{3/2}} + (1-\mu) = -\frac{\mu}{((y_1-(1-\mu))^2+{y_2}^2)^{3/2}} + \mu$$

と一致することを示し、これが 0 になる点は、正三角形解の点であることを確かめよ。

最小二乗法 (least squares method)

- $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{R}^n$ と $y \in \boldsymbol{R}$ の関係をある 1 次関数 $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が表しているとし、観測値 $\{(\overrightarrow{x}^i, y^i)\}_{i=1,\dots,N}$ から、$f$ を定める問題を以下のように考える。

- $f(\overrightarrow{x}) = {}^t\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x} + b$ として、次の $F$ を最小にする $a_j, b$ を求める。

$$F(\overrightarrow{a}, b) = \sum_{i=1}^{N} \|{}^t\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}^i + b - y^{(i)}\|^2 = \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{(i)} + b - y^{(i)})^2$$

- $F$ は複雑に見えても、$a_j, b$ についての 2 次式である。最小値が一意に存在するためには、2 階微分の行列が正定値ならばよい。このことは、下に述べる観測値の取り方により満たされているとする。

問題３.

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial a_j}$, $\dfrac{\partial F}{\partial b}$ を求めよ。2 階微分の行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {a_1}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_N} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_N} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial {a_N}^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_N \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial b} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_N \partial b} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial b^2} \end{pmatrix}$ を求めよ。

(2) $\hat{X} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(N)} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ について、$\hat{X}$ の $n+1$ 個の行ベクトルが 1 次独立であることと、$\hat{X}\,{}^t\hat{X}$ が正定値であること、2 階微分の行列が正定値であることは同値であることを示せ。

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ は、$x_j^{(i)}, y^i$ の平均を $\overline{x}_j = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_j^{(i)}$, $\overline{y} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} y^{(i)}$ として、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{x}_j + b - \overline{y} = 0$ と同値であることを示せ。

(4) $\dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ のとき、$\dfrac{\partial F}{\partial a_j} = 0$ は、次と同値であることを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{N}(x_k^{(i)} - \overline{x}_k)(x_j^{(i)} - \overline{x}_j) - \sum_{i=1}^{N}(y^{(i)} - \overline{y})(x_j^{(i)} - \overline{x}_j) = 0$$

- 統計において、$\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(X^{(i)} - \overline{X})^2$ を確率変数 $X$ の分散、$\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(X^{(i)} - \overline{X})(Y^{(i)} - \overline{Y})$ を確率変数 $X, Y$ の共分散とよぶ。共分散行列を用いた 1 次方程式から $a_j$ が定まり、この $a_j$ を用いて、平均を代入したものから、$b$ が求まる。