

## 0.1 ユークリッド空間の中の多様体上の曲線

多様体上の遠近は、そのままでは測ることが出来ない。実際、2次元以上の連結な部分多様体  $M$  上の相異なる3点  $x_0, x_1, x_2$  に対し、微分同相  $F: M \rightarrow M$  で  $F(x_0) = x_0, F(x_1) = x_2$  とするものがある。

一方、ユークリッド空間の中の多様体に対しては、多様体上の2点について遠近が議論できる。しかし、ユークリッド空間内の距離と多様体上での遠近は必ずしも一致しない。

例えば、1次元部分多様体  $C$  が  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  でパラメータづけられているとき、 $C$  上の距離は、 $C$  に沿う弧の長さを使うのが自然である。

ユークリッド空間内の曲線  $c$  の  $t_0$  から  $t_1$  までの長さは、 $\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt$  で与えられる。

**【問題 0.1.1】** (1)  $\mathbb{R}^n$  の2点  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$  に対し、 $c(0) = \mathbf{x}^0, c(1) = \mathbf{x}^1$  となる曲線の中で長さが最小のものは、 $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$  を結ぶ線分であることを示せ。

(2)  $c(0) = \mathbf{x}^0, c(1) = \mathbf{x}^1$  となる曲線に対し、 $A(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 dt$  とおく。 $A(c)$  が最小となる  $c(t)$  は、 $c(t) = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)$  となることを示せ。

**【解】** (1). 曲線の長さが  $\sup_{0=t_0 < \dots < t_m=1} \sum_{k=1}^m \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|$  によっても定義できることを示せば、三角不等式から従う。

また、別の解法として  $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0$  方向の単位ベクトルを  $\mathbf{v}$  として、 $c(t) \cdot \mathbf{v}$  を考える。 $\left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| \geq \left| \frac{dc}{dt}(t) \cdot \mathbf{v} \right|$  であるから、

$$\int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt \geq \int_0^1 \left| \frac{dc}{dt}(t) \cdot \mathbf{v} \right| dt \geq \left[ c(t) \cdot \mathbf{v} \right]_0^1 = (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|$$

である。

(2).

$$\begin{aligned} A(c + s\varepsilon) &= \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} + s \frac{d\varepsilon}{dt} \right\|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{dc}{dt} + s \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \cdot \left( \frac{dc}{dt} + s \frac{d\varepsilon}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 dt + 2s \int_0^1 \frac{dc}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} dt + s^2 \int_0^1 \left\| \frac{d\varepsilon}{dt} \right\|^2 dt \end{aligned}$$

$s$  についての2次式が  $c$  において極小値を取るためには、 $\int_0^1 \frac{dc}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} dt = 0$  でなければならない。このためには、 $\frac{dc}{dt} = 0$  でなければならない。このとき  $c$  は  $t$  についての1次式で  $c(t) = x^0 + t(x^1 - x^0)$  となる。 $A(c) \geq (L(c))^2$  で、 $c$  は  $L(c)$  の最小値を与えているから、 $A(c)$  の最小値も与えている。

**【問題 0.1.2】** ユークリッド空間内の  $C^1$  級曲線  $c$  の  $t_0$  から  $t_1$  までの長さ  $\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt$  は、 $\sup_{0=t_0 < \dots < t_m=1} \sum_{k=1}^m \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|$  と一致することを示せ。

**【解】**

ユークリッド空間の中の連結な多様体  $M \subset \mathbf{R}^n$  を考える。 $M$  上の曲線  $[0, 1] \rightarrow M \subset \mathbf{R}^n$  の長さも同じ  $L(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt$  で与えられる。連結な多様体上の2点は、滑らかな曲線で結ぶことが出来るから、 $x, y \in M$  に対し、 $\text{dist}(x, y) = \inf \{L(c) \mid c: [0, 1] \rightarrow M, c(0) = x, c(1) = y\}$  と定義すると、これは、対称 ( $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$ ) であり、三角不等式を満たす。 $\text{dist}(x, y) \geq 0$  であり、 $\text{dist}(x, y) = 0$  とすると、上の問により、 $\text{dist}(x, y) \geq \|x - y\|$  であるから、 $x = y$  となる。従って、 $\text{dist}(x, y)$  は距離となる。

**【問題 0.1.3】** 3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  内の  $(0, 0, -R)$  を中心とする半径  $R$  の球面を  $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z + R)^2 = R^2\}$  とする。このとき  $p: S_R \setminus \{(0, 0, -2R)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$  を  $(0, 0, -2R), \mathbf{x}, (p(\mathbf{x}), 0)$  が同一直線上にあることで定義する。 $\mathbf{R}^2$  上の曲線  $c(t) = (\xi(t), \eta(t))$  ( $t \in [0, 1]$ ) に対し、 $p^{-1} \circ c: [0, 1] \rightarrow S_R$  の長さを書き表せ。

**【解】**  $p(x, y, z) = \left( \frac{2Rx}{2R+z}, \frac{2Ry}{2R+z} \right)$  であり、

$$p^{-1}(u, v) = \left( \frac{4R^2u}{u^2 + v^2 + 4R^2}, \frac{4R^2v}{u^2 + v^2 + 4R^2}, -\frac{2R(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4R^2} \right)$$

である。ヤコビ行列を計算すると次のようになる。

$$Dp^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4R^2(-u^2 + v^2 + 4R^2)}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} & -\frac{8R^2uv}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} \\ -\frac{8R^2uv}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} & \frac{4R^2(u^2 - v^2 + 4R^2)}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} \\ -\frac{8R^3(2u)}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} & -\frac{8R^3(2v)}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} \end{pmatrix}$$

$${}^t(Dp^{-1})(Dp^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{(4R^2)^2}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(4R^2)^2}{(u^2 + v^2 + 4R^2)^2} \end{pmatrix}$$

だから、

$$\int_0^1 \left\| \frac{d(p^{-1} \circ c)}{dt} \right\| dt = \int_0^1 \frac{(4R^2)(\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2)}{(\xi(t)^2 + \eta(t)^2 + 4R^2)} dt$$

**【問題 0.1.4】**  $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + \cos y) \cos x \\ (2 + \cos y) \sin x \\ \sin y \end{pmatrix}$  で定め

る。 $M$  を  $\Phi$  の像として定義される  $\mathbf{R}^3$  の部分多様体とする。 $\mathbf{R}^2$  上の曲線  $c(t) = (\xi(t), \eta(t))$  ( $t \in [0, 1]$ ) に対し、曲線  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  に対し、 $\Phi \circ c : [0, 1] \rightarrow M$  の長さを書き表せ。

**【解】**  $D\Phi = \begin{pmatrix} -(2 + \cos y) \sin x & -\sin y \cos x \\ (2 + \cos y) \cos x & -\sin y \sin x \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$  であるから、 ${}^t D\Phi D\Phi = \begin{pmatrix} (2 + \cos y)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  従って、 $L(c) = \int_0^1 \sqrt{(2 + \cos \eta)^2 \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2} dt$

一般の多様体上で曲線の長さを測るために何が必要かをみるために、座標近傍のモデルであった、ユークリッド空間の中の多様体のパラメータ表示において、曲線の長さがどのように計算されるかを考える。

$M \subset \mathbf{R}^n$  をユークリッド空間の中の多様体として、そのパラメータ表示  $\Phi : W \rightarrow \mathbf{R}^n$  をとる。 $W \subset \mathbf{R}^p$  は解集合で、 $D\Phi$  のランクは  $p$  である。曲線  $c : [0, 1] \rightarrow M$  に対して、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  という分割をとり、 $c([t_{i-1}, t_i]) \subset \Phi(W)$  とする。曲線は  $\Phi^{-1} \circ c|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow W$  を定める。

$$\frac{dc}{dt}(t) = (D\Phi)_{(\Phi \circ c)(t)} \frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt}(t)$$

の長さ

$$\sqrt{{}^t \left( \frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt} \right) (D\Phi)(D\Phi) \left( \frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt} \right)}$$

が接ベクトルの長さである。ここで、 $\left( \frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt} \right) \in \mathbf{R}^p$   $A = {}^t(D\Phi)(D\Phi)$  は

$p \times p$  正値対称行列である。正値とは、 ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \geq 0$  であり、 ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} = 0$  ならば  $\mathbf{x} = 0$  であることである。あるいは、 $A$  の固有値が全て正であるといっても良い。

正値対称行列  $A$  により、 ${}^t \mathbf{v} A \mathbf{v}$  の形で表されるものは、内積または双 1 次形式  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto {}^t \mathbf{u} A \mathbf{v}$  を考えることに関係している。ベクトルの長さが表されると、余弦定理により角度が定まる。これは、ユークリッドの内積については、 $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$  として、2つのベクトル  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  の間の角度を  $\theta$  とするとき、 $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$  であったことに対応している。

長さを測るにあたって、長さの 2 乗を表すのが自然である。

一般の実線形空間  $V$  に対し  $q: V \rightarrow \mathbf{R}$  が 2 次形式とは、 $a \in \mathbf{R}, \mathbf{v} \in V$  に対し、 $q(a\mathbf{v}) = a^2 q(\mathbf{v})$ 、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対し、 $q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + 2B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  という双 1 次形式  $B: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  があることである。さらに 2 次形式  $q$  が正値であるとは  $q(\mathbf{v}) = 0$  ならば  $\mathbf{v} = 0$  を満たすことである。上の双 1 次形式は、対称性  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  を満たす。 $B$  から  $q$  は容易に復元される、 $2^2 q(\mathbf{v}) = q(\mathbf{v} + \mathbf{v}) = 2q(\mathbf{v}) + 2B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  であるから、 $q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  である。 $V$  の基底  $(e_1, \dots, e_n)$  を取って、 $A_{ij} = B(e_i, e_j)$  とすると、 $B(\sum u_i e_i, \sum v_j e_j) = \sum_{i,j} A_{ij} u_i v_j$  と書かれ、 $A_{ij}$  は正値対称行列である。

正値対称行列  $A$  は直交行列  $P$  により対角行列と共役となる。 ${}^t P A P =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$A$  が正値ならば  $A$  の固有値  $\lambda_i$  は正であり、 $\delta = \min\{\lambda_i\}$

に対して、 $\sum_{i,j} A_{ij} u_i v_j \geq \delta \sum_{i=1}^n v_i^2$  が満たされる。すなわち、正値 2 次形式  $q$  に対して、 $V$  の基底をとり、 $\mathbf{R}^n$  と  $V$  を同一視すると、ある整数  $\delta$  があって、 $q(\mathbf{v}) \geq \delta \|\mathbf{v}\|^2$  となる。

## 0.2 リーマン計量

一般の多様体  $M$  上では、 $x$  のまわりの座標近傍  $(U, \varphi)$  をとると、 $T_x M$  の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  が定まる。 $T_x M$  の元の長さの 2 乗をあたえる関数  $q(x): T_x M \rightarrow \mathbf{R}$  を考える。 $x$  は  $M$  上の点であるから、 $C^\infty$  級関数  $q: TM \rightarrow \mathbf{R}$

で、 $q|_{T_x M}$  が正値 2 次形式となるものを与えれば接ベクトルの長さの 2 乗が定まる。これに付随して、正値対称双 1 次形式  $g: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  が定まる。通常、この  $g$  をリーマン計量と呼ぶ。 $g$  は  $x \in M$  に滑らかに依存する  $T_x M$  上の正値対称双 1 次形式である。

$x$  のまわりの座標近傍  $(U, \varphi)$  により、 $x \in U$  に対し  $T_x M$  の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  が同時に定まる。そのような、基底について、 $v \in T_x M$  は  $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  と書かれ、 $q(v) = g(v, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) v_i v_j$  と書かれる。 $x \in U$  に対し、 $(g_{ij}(x))$  は正値対称行列、 $i, j$  を固定すると  $g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^\infty$  級関数である。

このようなリーマン計量を持つ多様体をリーマン多様体と呼ぶ。

### 定義 0.2.1

リーマン多様体  $M$  上では曲線の長さを測ることが出来る。すなわち、 $c: [0, 1] \rightarrow M$  に対して、

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{q\left(\frac{dc}{dt}\right)} dt = \int_0^1 \sqrt{g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)} dt$$

で定める。

$M$  の座標近傍系を  $\{U_k, \varphi_k\}$  とする。 $c: [0, 1] \rightarrow M$  に対して、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  という分割をとり、 $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$  とする。 $U_k$  上では、リーマン計量は  $g_{ij}^{(k)}$  と書かれ、 $\varphi_k(c(t)) = (c_1^{(k)}(t), \dots, c_n^{(k)}(t))$  とすれば、曲線の長さは

$$L(c) = \sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}^{(k)}(c(t)) \frac{dc_i^{(k)}}{dt}(t) \frac{dc_j^{(k)}}{dt}(t)} dt$$

で与えられる。

**【例 0.2.2】**  $a$  を実数とする。 $\mathbb{R}^n$  の原点の近傍において、 $q\left(\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\sum v_i^2}{(1 + a(\sum x_i^2))^2}$  とする。この式で  $a > 0$  のときには、 $\mathbb{R}^n$  全体で、 $a < 0$  のときには、 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{1}{\sqrt{|a|}}\}$  においてリーマン計量が定義されている。

0 と  $(r, 0, \dots, 0)$  を結ぶ線分  $[0, r] \rightarrow \mathbf{R}^n$  の長さは、 $\int_0^r \frac{1}{1+at^2} dt$  で与えられる。 $a > 0$  ならば  $\int_0^r \frac{1}{1+at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ \tan^{-1} \sqrt{at} \right]_0^r = \frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1} \sqrt{ar}$  で与えられる。これは  $r \rightarrow \infty$  のときに有限値  $\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$  に収束する。 $a < 0$  ならば  $\int_0^r \frac{1}{1+at^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \left[ \log \frac{1+\sqrt{|a|}t}{1-\sqrt{|a|}t} \right]_0^r = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \log \frac{1+\sqrt{|a|}r}{1-\sqrt{|a|}r}$  で与えられる。これは  $r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|a|}}$  のときに無限大に発散する。また、 $\mathbf{R}^n$  の円  $(\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0)$  の長さは、 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+ar^2} d\theta = \frac{2\pi}{1+ar^2}$  で与えられる。このような空間での円周率は半径に依存する。

連結なリーマン多様体上の 2 点は、滑らかな曲線で結ぶことが出来るから、 $x, y \in M$  に対し、

$$\text{dist}(x, y) = \inf \{ L(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M, c(0) = x, c(1) = y \}$$

と定義すると、これは、対称性、三角不等式を満たす。 $x, y \in M$  に対し  $\text{dist}(x, y) \geq 0$  である。 $\text{dist}(x, y) = 0$  とすると  $x = y$  となることは次のようにして示す。 $x$  の座標近傍  $(U, \varphi)$  上で  $g_{ij}$  と表示すると、ある  $\varepsilon, \delta > 0$  に対し、 $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$  上で  $\sum_{i,j} g_{ij}(x) v_i v_j \geq \delta \sum_i v_i^2$  となる。(この不等式は、 $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$  の固有値の最小値よりも小であるような  $\delta > 0$  に対し、 $x$  の近傍で成立する。) 従って、 $y \in \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$  ならば、 $\text{dist}(x, y) \geq \sqrt{\delta} \|\varphi(x) - \varphi(y)\|$  となり、 $\text{dist}(x, y) = 0$  とすると  $x = y$  となる。 $y \notin \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$  とすると、 $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$  の近傍で定義された関数  $z \mapsto \|\varphi(x) - \varphi(z)\|^2$  を  $M$  上に拡張する  $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$  の外で  $\varepsilon^2$  より大きな値をとる関数を考えることにより、中間値の定理から、 $x, y$  を結ぶ曲線は  $\varphi^{-1}(\partial B_\varepsilon(\varphi(x)))$  と交わる。但し  $\partial B_\varepsilon(\varphi(x)) = \{\|y - \varphi(x)\| = \varepsilon\}$  である。従って、 $\text{dist}(x, y) \geq \min \{ \text{dist}(z, x) \mid z \in \partial B_\varepsilon(\varphi(x)) \} \geq \delta \varepsilon$  となる。

これにより、リーマン多様体上の距離が定まった。

### 0.3 測地線

一つの座標近傍上で考えると、 $\mathbf{R}^n$  の開集合  $V$  上の  $C^1$  級曲線  $c: [0, 1] \rightarrow V \subset \mathbf{R}^n$  の長さを積分  $L(c) = \int_0^1 \sqrt{\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}} dt$  により定義しているときに、 $c(0) = \mathbf{x}^0$ ,  $c(1) = \mathbf{x}^1$  を満たす  $c$  の中で  $L(c)$  の値が最小になるものを探するという問題になる。

このような  $L(c)$  を最小にする曲線が微分可能であり、常に  $\frac{dc}{dt} \neq 0$  となることがわかっているとすると、実際に最小を与える曲線  $c$  に対し、 $c$  のパラメータを取り替えたものも  $L(c)$  を最小にする。すなわち、 $C^1$  級写像  $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(1) = 1$ ,  $\frac{d\tau}{ds} > 0$  を満たしていれば、 $L(c) = L(c \circ \tau)$  である。

特に、速さを一定にするために、 $\sigma(t) = \frac{1}{L(c)} \int_0^t \sqrt{\sum g_{ij} \circ c \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}} dt$  とし、 $\tau$  を  $\sigma$  の逆関数とすると、 $\sqrt{\sum g_{ij} \circ (c \circ \tau) \frac{dc_i \circ \tau}{ds} \frac{dc_j \circ \tau}{ds}} = L(c)$  で一定となる。

このとき、

$$\left( \int_0^1 \sqrt{\sum g_{ij} \circ (c \circ \tau) \frac{dc_i \circ \tau}{ds} \frac{dc_j \circ \tau}{ds}} ds \right)^2 = \int_0^1 \sum g_{ij} \circ (c \circ \tau) \frac{dc_i \circ \tau}{ds} \frac{dc_j \circ \tau}{ds} ds,$$

であることに注意する。

一般に、 $C^1$  級曲線  $c$  に対し、作用と呼ばれる積分  $A(c) = \int_0^1 \sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} dt$  を考えると、 $L(c)^2 \leq A(c)$  が成立する。実際、 $[0, 1]$  上の実数値連続関数  $f, g$  に対し、内積  $f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t) dt$  が考えられるが、これに対するシュワルツの不等式  $(f \cdot g)^2 \leq (f \cdot f)(g \cdot g)$  について、 $g = 1$  とすれば、 $\left( \int_0^1 f(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 (f(t))^2 dt$  が得られるが、ここで  $f = \sqrt{\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}}$  とすればわかる。このシュワルツの不等式の等号が成立することと  $f$  が  $g = 1$  の定数倍すなわち  $f$  が定値関数であることは同値である。 $C^1$  級曲線  $c$  が  $A(c)$  を最小にするとき、もしも  $\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}$  が 0 にならず、一定でもなければ、上のように  $c \circ \tau$  を考えれば、 $A(c \circ \tau) = L(c \circ \tau)^2 = L(c)^2 < A(c)$  となり  $A(c)$  の最小性に反する。

上に述べたように、 $L(c)$  の最小を与える  $c$  が常に  $\frac{dc}{dt} \neq 0$  を満たす  $C^1$  級曲線であることがわかれば、これは  $A(c)$  の最小を与えているので、問題を取

り替えて、 $A(c)$  の最小値を与える  $c(t)$  を求めることにする。

$$A(c) = \int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} dt \text{ が } C^1 \text{ 級曲線 } c \text{ を変化させたときの最小と}$$

なっているための必要条件を調べる。変分法と呼ばれる方法である。そのために、 $C^\infty$  写像  $\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  で  $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$  となるものをとる。十分小さい  $s$  に対し  $c(t) + s\varepsilon(t) \in V$  であるから、 $A(c + s\varepsilon)$  定まるが、 $s$  の関数として  $s = 0$  のときに、最小値  $A(c)$  をとることを仮定している。

$$A(c + s\varepsilon) = \int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij}(c(t) + s\varepsilon(t)) \frac{d(c_i + s\varepsilon_i(t))}{dt} \frac{d(c_j + s\varepsilon_j(t))}{dt} dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(c + s\varepsilon) \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \varepsilon_k(t) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} + 2 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{d\varepsilon_j}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

の値が 0 でなければならない。第 2 項を部分積分すると

$$\int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{d\varepsilon_j}{dt} dt = \left[ \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \varepsilon_j \right]_0^1 - \int_0^1 \sum_j \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \right\} \varepsilon_j dt$$

であるが、添え字を付け替えて代入すると、

$$\int_0^1 \sum_k \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} - 2 \sum_i \frac{d}{dt} \left( g_{ik} \frac{dc_i}{dt} \right) \right\} \varepsilon_k(t) dt = 0$$

となるが、これが  $\varepsilon$  のとり方によらず成立している。このとき、中括弧の中  $\{\dots\} = 0$  でなければならない。実際、一般の  $[0, 1]$  上の  $\mathbf{R}^n$  値  $C^\infty$  級関数  $f, g$  に対し、内積  $f \bullet g = \int_0^1 \sum_i f_i(t) g_i(t) dt$  が考えられるが、 $f(t_0) \neq 0$  ならば、 $g(0) = g(1) = 0, f \bullet g > 0$  となるような  $g$  を、台が  $t_0$  の近傍にある関数を用いて作ることが出来る。従って、各  $k$  に対し、

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} - 2 \sum_i \frac{d}{dt} \left( g_{ik} \frac{dc_i}{dt} \right) = 0$$

あるいは、

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} - 2 \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt} - 2 \sum_i g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = 0$$



すなわち、

$$\sum_i g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$$

さらに、 $g^{ij}$  を  $g_{ij}$  の逆行列として、 $\sum_k g^{\ell k} g_{kj} = \delta_{\ell j}$ 、 $g_{ij}$  は対称行列だから、 $g^{ij}$  も対称行列であることに注意して、

$$\frac{d^2 c_\ell}{dt^2} = \sum_{i,k} g^{k\ell} g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = \sum_k g^{k\ell} \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$$

のように正規形の2階の常微分方程式に書く。これが  $A(c)$  が最小になるための  $c$  が満たすべき、必要条件である。この必要条件の常微分方程式を満たす曲線  $c$  を測地線と呼ぶ。

測地線の微分方程式に現れる  $\left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right)$  は、 $i, j$  について対称ではない。しかし、微分方程式において効いてくるのは、 $\frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$  を掛けて足し合わせて意味のあるものだから、その対称成分である  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right)$  が測地線を決定している。

測地線の微分方程式を

$$\frac{d^2 c_\ell}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^\ell \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt} = 0$$

の形に書いたとき、 $\frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$  の係数として現れる  $\Gamma_{ij}^\ell$  をクリストフェルの記号というが、 $\Gamma_{ij}^\ell = \Gamma_{ji}^\ell$  となるようにとれば、 $\Gamma_{ij}^\ell = -\frac{1}{2} \sum_k g^{k\ell} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right)$  となる。

測地線の方程式を眺めると、 $c(t)$ 、 $\frac{dc}{dt}$ 、 $\frac{d^2 c}{dt^2}$  の方程式であるが、通常  $v = \frac{dc}{dt}$  として、

$$v_\ell = \frac{dc_\ell}{dt}, \quad \frac{dv_\ell}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^\ell v_i v_j = 0$$

と見るのではなく、うまく  $v_\ell = \frac{dc_\ell}{dt}$  を満たすように定まった  $c(t)$  に対して  $v(t) \in T_{c(t)}M$  に対しての線形常微分方程式

$$\frac{dv_\ell}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^\ell \frac{dc_i}{dt} v_j = 0$$

の解を与えていると見ることが出来る。

曲線  $c(t)$  を任意に定めても上の時刻  $t$  に依存する線形常微分方程式は意味を持ち、解の存在と一意性の定理から、初期値  $v^0 \in T_{c(0)}M$  に対し、 $v(0) = v^0$  となる解  $v(t) \in T_{c(t)}M$  が一意に定まる。ユークリッドの計量  $g_{ij} = \delta_{ij}$  に対しては、 $\Gamma_{ij}^\ell = 0$  となり、 $v(t)$  は定ベクトルで、ただ、 $v^0 \in T_{c(0)}\mathbf{R}^n$  を  $v^0 \in T_{c(t)}$  に平行移動したものになる。従って  $v(t)$  を  $v(0) = v^0$  の平行移動 (parallel transport) と呼ぶ。線形常微分方程式の解の空間は、初期値の空間と同型なベクトル空間である。

**【問題 0.3.1】** リーマン計量から  $\Gamma_{ij}^\ell = \Gamma_{ji}^\ell$  となるように定めた線形常微分方程式の解  $v(t)$  については、 $q(v(t))$  は一定となることを示せ。

**【解】** 微分方程式は

$$\sum_i g_{ik}(c(t)) \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(t)) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(c(t)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(c(t)) \right) \frac{dc_i}{dt} v_j$$

と書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i,j} g_{ik} v_i v_k \right) &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \frac{dc_j}{dt} v_i v_k + 2 \sum_{i,k} g_{ik} \frac{dv_i}{dt} v_k \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \frac{dc_j}{dt} v_i v_k + \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{dc_i}{dt} v_j v_k = 0 \end{aligned}$$

最後は、括弧をはずして、第1項と第3項、第2項と第4項が打ち消しあう。

この問題の結論から、曲線  $c(t)$  に沿う線形常微分方程式の解  $v(t)$  に対し  $q(v(t))$  は一定となったが、線形常微分方程式の解の空間は  $n$  次元実ベクトル空間であるから、2つの解  $v(t), w(t)$  に対し、 $q(v(t) + w(t))$  も一定で、 $g(v(t), w(t)) = \frac{1}{2} (q(v(t) + w(t)) - q(v(t)) - q(w(t)))$  も一定である。したがって正規直交基底  $(v^{(1)}(0), \dots, v^{(n)}(0))$  をなすベクトル  $v^{(m)}(0)$  を初期値として、常微分方程式の解  $v^{(m)}(t)$  を求めると  $(v^{(1)}(t), \dots, v^{(n)}(t))$  も正規直交基底となる。

このように、線形常微分方程式

$$\frac{dv_\ell}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^\ell \frac{dc_i}{dt} v_j = 0$$

の解を用いて、 $T_{c(0)}(M)$  の一つの基底を、曲線  $c(t)$  に沿って動かすことによ

り、 $T_{c(t)}(M)$  に基底を定めることが出来る。 $\Gamma_{ij}^\ell$  により、接続が与えられていると言う。特にリーマン計量から定まる  $\Gamma_{ij}^\ell = \Gamma_{ji}^\ell$  となる接続をレビ・チビタ接続と呼ぶ。レビ・チビタ接続は正規直交基底を正規直交基底に平行移動する。

注意。 $T_{c(0)}M$  から  $T_{c(1)}M$  への平行移動は曲線  $c(t)$  に依存して定まるもので、 $c(t)$  を異なる曲線に取り替えると一般には異なる基底に移る。

## 0.4 局所的最短性

論理的には

( $c$  が  $C^1$  級、 $L(c)$  最小、 $\frac{dc}{dt} \neq 0$ )  $\implies$  ( $c \circ \tau$  は  $C^1$  級、 $A(c) = L(c \circ \tau)^2$  最小)

( $c$  が  $C^1$  級、 $A(c)$  最小)  $\implies$  ( $c$  は測地線の方程式の解、 $\|\frac{dc}{dt}\| \neq 0$  で一定)  
 $c$  が測地線の方程式の解であるときに、 $c$  の長さが2点の距離を表すかどうかはここまでの議論だけでは必要条件を求めただけだからわからない。また、 $L(c)$  の最小を与えて曲線としては、 $\frac{dc}{dt} = 0$  となる点を持つような曲線もともに考えて最小になるものを探す必要がある。

まず、測地線の方程式の性質をみる。

$V \subset \mathbb{R}^n$  上で定義された正規形の2階の常微分方程式は、 $V \times \mathbb{R}^n$  上の正規形の1階の常微分方程式に書き直される。初期値は  $c(0) = \mathbf{x} \in V$ ,  $\frac{dc}{dt}(0) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  として与えられる。そのような初期値をもつ解  $c: (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$  は十分小さい  $\varepsilon$  に対し存在する。また、 $c(t)$  が  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  を初期値とする解のとき  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  に対し、 $c(at)$  は  $(-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$  上で定義された  $(\mathbf{x}, a\mathbf{v})$  を初期値とする解となる。実際、

$$\begin{aligned} \sum_i g_{ik}(c(at)) \frac{d^2 c_i(at)}{dt^2} &= \sum_i a^2 g_{ik}(c(at)) \frac{d^2 c_i}{dt^2}(at), \\ &= \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(at)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(c(at)) \right) \frac{dc_j(at)}{dt} \frac{dc_i(at)}{dt} \\ &= \sum_{i,j} a^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(at)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(c(at)) \right) \frac{dc_j}{dt}(at) \frac{dc_i}{dt}(at) \end{aligned}$$

だから、 $c(at)$  も解となる。

$V \times \mathbb{R}^n$  上の初期値を  $(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  とする解は  $(c(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}), \frac{dc}{dt}(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}))$  の形のものである。1階の常微分方程式を  $V \times \mathbb{R}^n$  上のベクトル場として書くと、座標

$$\sum_i X_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \mapsto (x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n)$$

について、

$$\sum_{\ell} \left\{ \sum_k g^{k\ell} \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) X_i X_j \right\} \frac{\partial}{\partial X_{\ell}} + \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と書かれる。このベクトル場が生成するフロー  $F$  は、 $V \times \mathbb{R}^n$  のコンパクト集合  $K$  上の点を初期値として、 $t$  が十分小さいときに定義されている： $F : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times K \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ 。  $F(t, \mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$  であり、 $(\mathbf{x}, 0) \in \text{int } K$  とする。  $F(at, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(t, \mathbf{x}, a\mathbf{v})$  である。従って、0の近傍の  $\mathbf{v}$  に対しては  $E_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = F(1, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  が定義される。この  $E_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} \mapsto F(1, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  は  $0 \in \mathbb{R}^n$  の近傍から  $\mathbf{x}$  の近傍への微分同相写像となる。実際、

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (F(1, \mathbf{x}, a\mathbf{v}) - F(1, \mathbf{x}, 0)) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (F(1, \mathbf{x}, a\mathbf{v}) - F(1, \mathbf{x}, 0)) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (F(a, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - F(0, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = \left. \frac{dF(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{v} \end{aligned}$$

であるから、 $D(E_{\mathbf{x}})_{(0)} = \text{id}$  である。従って、逆写像定理により、 $E_{\mathbf{x}}$  は  $0 \in \mathbb{R}^n$  の近傍から  $\mathbf{x} \in V$  の近傍への微分同相写像である。

$E_x : T_x M \rightarrow M$  あるいは、 $E : TM \rightarrow M$  は、指数写像（エクスポネンシャル写像）と呼ばれる。

**【問題 0.4.1】** 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の単位球面を  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  とする。 $S^2$  上の2点を結ぶ  $S^2$  上の曲線で長さが最小のものは、原点を通る平面と  $S^2$  の交わり（大円）上の弧であることを示せ。ヒント：1点を通る大円の族、1点を中心とする小円の族を考える。

さて、 $E_x : T_x M \rightarrow M$  による  $T_x M$  の同心球面の像と  $x$  から出る測地線との関係を観察する。

$H(t, s) = E_{\mathbf{x}}(t\mathbf{v}(s)) = F(1, \mathbf{x}, t\mathbf{v}(s)) = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}(s))$  を考える。但し  $q(\mathbf{v}(s)) = g(\mathbf{v}(s)) = \sum g_{ij}(\mathbf{x})v_i(s)v_j(s) = 1$  とする。ここで、 $\frac{\partial H}{\partial s}$  と  $\frac{\partial H}{\partial t}$

の内積を考えたい。そこで、

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial s} \right) \\
 &= \sum_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \right) \frac{\partial H_j}{\partial s} + \sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial^2 H_j}{\partial s \partial t} \\
 &= \sum_j \left( \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_k}{\partial t} \right) \frac{\partial H_j}{\partial s} + \sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial^2 H_j}{\partial s \partial t} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned}$$

途中で、測地線の方程式を導いた途中の式を使った。最後の式は、測地線  $c(t)$  の  $q\left(\frac{dc}{dt}\right) = g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)$  が一定であることから、0 となるが、 $t=0$  のとき、 $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$  であるから、 $\sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial s} = 0$  が常に成立する。

さて、測地線の局所最短性は次のように示される。

$y = E_x(v)$  のとき、 $c(0) = x$ ,  $c(1) = y$  に対し、 $c(s) = E_x(t(s)v(s))$  と書くことが出来る。このとき、 $H(t,s) = E_x(t(s)v(s))$  とおいて、 $\frac{dc}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial H}{\partial s}$  となるが、 $\frac{\partial H}{\partial t}$  と  $\frac{\partial H}{\partial s}$  は直交する:  $g\left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial s}\right) = 0$ .

$$\sqrt{q\left(\frac{dc}{ds}\right)} \geq \sqrt{q\left(\frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{ds}\right)} = \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} = \left|\frac{dt}{ds}\right|$$

従って、 $\int_0^1 \sqrt{q\left(\frac{dc}{ds}\right)} ds \geq \int_0^1 \left|\frac{dt}{ds}\right| ds \geq |t(1) - t(0)|$ .

従って、 $x$  と  $y$  を結ぶ測地線は、最短の曲線である。

**【問題 0.4.2】** 3次元ユークリッド空間内の双曲放物面  $S = \{(x_1, x_2, z) \mid z = x_1 x_2\}$  に対し、 $(x_1, x_2)$  を座標としてとる。 $S$  上の点  $(x_1, x_2, x_1 x_2)$  における接ベクトル  $(v_1, v_2, x_2 v_1 + x_1 v_2)$  の長さは

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + (x_2 v_1 + x_1 v_2)^2} = \sqrt{(1 + x_2^2)v_1^2 + 2x_1 x_2 v_1 v_2 + (1 + x_1^2)v_2^2}$$

であるから、 $g = \begin{pmatrix} 1 + x_2^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & 1 + x_1^2 \end{pmatrix}$  と書かれる。

$$g^{-1} = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} 1 + x_1^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & 1 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} g &= \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} g = \begin{pmatrix} 2x_2 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}. \\ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3x_2}{2} \\ -\frac{x_2}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{i2}}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x_1}{2} \\ -\frac{3x_1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right) \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} &= -2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} &= -\frac{2}{1+x_1^2+x_2^2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【解】

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} (2+\cos x_2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{と書かれる。} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2+\cos x_2)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} g = \begin{pmatrix} -2(2+\cos x_2) \sin x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -2(2+\cos x_2) \sin x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 2(2+\cos x_2) \sin x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{i2}}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} -(2+\cos x_2) \sin x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2 \sin x_2}{2+\cos x_2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\ -\sin x_2 (2+\cos x_2) \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$v_1^2(2+\cos x_2)^2 + v_2^2$  はフローで不変であるからその値が 1 であるような軌道の全体を考える。

$$\cos \theta = v_1(2+\cos x_2), \quad \sin \theta = v_2 \text{ とおくと}$$

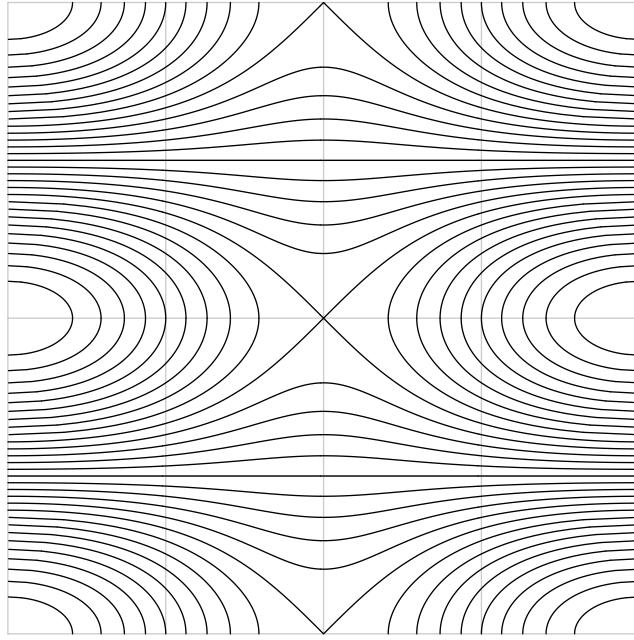


図 1  $x_2\theta$  空間は 2 次元のトーラスであり、その上のベクトル場の生成するフローの軌道は  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  上でこの図のようになる。格子の幅は  $\frac{\pi}{2}$  である。 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  の軌道は  $x_1$  が一定の測地線である。中央および上下の固定点が  $x_2 = \pi$  の測地線、頂点および左右の固定点が  $x_2 = 0$  の測地線に対応する。

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta &= \frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{dv_1(2 + \cos x_2)}{dt} = \frac{dv_1}{dt}(2 + \cos x_2) - v_1 v_2 \sin x_2 = \\
 v_1 v_2 \sin x_2 &= \frac{\sin x_2}{2 + \cos x_2} \cos \theta \sin \theta, \\
 \frac{d\theta}{dt} \cos \theta &= \frac{d \sin \theta}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = -\sin x_2(2 + \cos x_2)v_1^2 = -\frac{\sin x_2}{2 + \cos x_2} \cos \theta \cos \theta \\
 \text{従って、} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\sin x_2}{2 + \cos x_2} \cos \theta, \quad \frac{dx_2}{dt} = \sin \theta \text{ を得る。これはさらに積分で} \\
 \text{きる。すなわち、} \frac{d\theta}{dx_2} &= -\frac{\sin x_2}{2 + \cos x_2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ だから } \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta} + \frac{\sin x_2 dx_2}{2 + \cos x_2} = 0, \\
 f(x_2, \theta) &= (2 + \cos x_2) \cos \theta \text{ とおくと、} \frac{df(x_2, \theta)}{dt} = 0 \text{ となる。従って、軌道} \\
 &\text{は } f \text{ の等位線上にある。}
 \end{aligned}$$

この  $(x_2, \theta)$  空間におけるベクトル場の様子は良くわかる。ベクトル場の対称性から、4本の軌道を除いてすべて閉軌道である。 $x_2$  座標は、 $2\pi$  以下の幅で振動するか、無限に増加あるいは減少するかのどちらかである。 $x_1$  座標は  $x_1 = \int_0^t \frac{\cos \theta}{2 + \cos x_2}$  としてわかる。これは、 $x_1$  が一定の測地線以外では単調に限りなく減少するか限りなく増加するかのどちらかである。測地流の図は測地線だけを見ると非常に複雑であるが、理解し得るものである。

## 0.5 測地流

ここで、多様体  $M$  上にリーマン計量を与えられている状況にもどる。 $M$  の座標近傍系  $\{(U_k, \varphi_k)\}_k$  に対して、 $T_x M$  ( $x \in U$ ) の基底  $\frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}}$  が定まり、 $g_{ij}^{(k)}$  という形でリーマン計量が表示される。

$\gamma_{ab} = \varphi_a \varphi_b^{-1} : \varphi_b(U_a \cap U_b) \rightarrow \varphi_a(U_a \cap U_b)$  とおいて、 $\sqcup V_k \times \mathbf{R}^n$  に  $(\gamma_{ab}, D\gamma_{ab})$  による同値関係を入れたものが  $TM$  であった。

座標近傍  $(U_k, \varphi_k)$  に対し、 $\varphi(U_k) \times \mathbf{R}^n$  上のベクトル場が定まるが、このベクトル場は、 $(\gamma_{ab}, D\gamma_{ab})_* : T(\varphi_b(U_a \cap U_b) \times \mathbf{R}^n) \rightarrow T(\varphi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbf{R}^n)$  で写りあわなければならない。それは  $A(c)$  が  $c : [0, 1] \rightarrow M$  に対して定義されていて、 $c([0, 1]) \in U_a \cap U_b$  に対して  $A(c)$  を最小にするものが、解となるものであるからである。

従って、測地線の方程式は、接束  $TM$  上のベクトル場として表示される。

ここでリーマン計量に付随する 2 次形式写像  $q : TM \rightarrow \mathbf{R}$  を考える。測地線  $c(t)$  について、前に計算したように  $q\left(\frac{dc}{dt}\right)$  は一定である。

また、 $a \in \mathbf{R}_{>0}$  に対して、 $q^{-1}(a)$  は余次元 1 の部分多様体である。実際、 $q(av) = a^2 q(v)$  だから  $\frac{dq(av)}{da} = 2aq(v) \neq 0$  であるから、 $v \in T_x M$  が  $\neq 0 \in T_x M$  を満たせば、 $v$  は正則点である。さらに、 $M$  がコンパクトならば  $q^{-1}(a)$  はコンパクトである。

従って、 $M$  がコンパクトならば  $q^{-1}(a)$  はコンパクトで、定理??により、コンパクト多様体上のベクトル場はフローを生成するから、 $F_t : q^{-1}(a) \rightarrow q^{-1}(a)$  が定義される。従って、 $F_t : TM \rightarrow TM$  がフローとして定義されていたことになる。

$M$  をコンパクト連結多様体とすると、 $M$  の 2 点  $x, y$  に対し、曲線  $c : [0, 1] \rightarrow M$  で  $c(0) = x, c(1) = y, \text{dist}(x, y) = L(c)$  となるものがある。

このことの証明は次のようにしてなされる。まず、 $\varepsilon > 0$  で、各点  $x$  における  $T_x M$  の半径  $2\varepsilon$  の閉球体は  $E_x$  で  $M$  に単射されるとする。正整数  $k$  に対し、 $E_x : T_x \rightarrow M$  が  $\{y \in M \mid \text{dist}_g(x, y) < k\varepsilon\}$  へ全射となるという命題を  $k$  についての帰納法で示す。 $k = 2$  のときにこの命題は正しい。さて、 $k$  の時に正しいと仮定する。このとき、 $y \in M$  が  $k\varepsilon \leq \text{dist}_g(x, y) < (k+1)\varepsilon$  にあるとす



る。  $E_y : T_y M \rightarrow M$  による半径  $\varepsilon$  の球面  $S_\varepsilon = \{v \in T_y M \mid g(v, v) = \varepsilon^2\}$  の像  $E_y(S_\varepsilon)$  を考える。  $\text{dist}(x, y)$  を  $E_y(S_\varepsilon)$  に制限した  $\mathbf{R}$  値関数の最小値  $m$  をとる点  $z = E_y(v) \in E_y(S_\varepsilon)$  が存在する。  $x, y$  を結ぶ曲線は、  $E_y(S_\varepsilon)$  の点を通るから、  $m < k\varepsilon$  である。  $z = E_y(v) = E_x(w)$  と書かれ、  $g_x(w, w) = \text{dist}(x, z)$ 、  $\text{dist}(z, y) = \varepsilon$  である。  $\left. \frac{dE_x(tw)}{dt} \right|_{t=1}$  と  $\left. \frac{dE_y(tv)}{dt} \right|_{t=1}$  とはともに  $T_z M$  の元であるが、もしもこの2つのベクトルが実数倍でないとする  $z$  をずらして  $z' \in E_y(S_\varepsilon)$  で  $\text{dist}(x, z') < \text{dist}(x, z)$  とすることができる。これは  $z$  で  $\text{dist}$  の最小値をとることに反するから、2つの測地線は  $z$  においてちょうど真反対の方向を向いている。このことから、  $w' = \frac{m + \varepsilon}{m} w$  とすると  $E_x w' = y$  となる。従って、帰納法が成立し、任意の  $M$  の点は  $E_x : T_x M \rightarrow M$  の像となった。

この証明によって、コンパクト連結リーマン多様体の2点  $x, y$  に対し、それを結ぶ最小の長さの曲線が存在し、それは測地線で表される。これを最短測地線という。

実は、リーマン多様体が距離空間として完備であれば、最短測地線が存在する。このときに、  $E_x : T_x M \rightarrow M$  は全射となる。

**【例 0.5.1】**  $M = S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  に  $\mathbf{R}^3$  のユークリッドの計量から導かれたリーマン計量を定める。  $T_1 S^2$  を  $T S^2$  の長さ1の接ベクトルの全体とする。測地流は、  $T_1 S^2$  上のフローであり、軌道は大円の接ベクトルとなるから、すべての軌道は閉軌道である。  $T_1 S^2$  は  $SO(3)$  と同一視できる。  $SO(3) \ni A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  に対して、  $\mathbf{v}_1 \in S^2$  における接ベクトル  $\mathbf{v}_2$  を対応させるとき、  $F_t : T_1 S^2 \rightarrow T_1 S^2$  は、  $F_t((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)) =$

$$(\cos t \mathbf{v}_1 + \sin t \mathbf{v}_2, -\sin t \mathbf{v}_1 + \cos t \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と計算される。

**【例 0.5.2】**  $M = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$  に  $\mathbf{R}^2$  のユークリッドの計量から導かれたリーマン計量を定める。  $T_1 T^2$  を  $T T^2$  の長さ1の接ベクトルの全体とする。測地流は、  $T_1 T^2$  上のフローであり  $T_1 T^2 = \{((x_1, x_2), (v_1, v_2)) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 = 1\}$  と見るとき、  $F_t((x_1, x_2), (v_1, v_2)) = ((x_1 + tv_1, x_2 + tv_2), (v_1, v_2))$  と書かれる。  $\frac{v_2}{v_1} \in \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$  のとき、閉軌道、  $\frac{v_2}{v_1} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  のとき、  $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2 \times \{(v_1, v_2)\}$

において稠密な軌道となる。

**【問題 0.5.3】** コンパクトリーマン多様体  $M$  について、写像  $F : TM \rightarrow M \times M$  を  $X \in T_x M \subset TM$  に対し、 $F(X) = (x, E_x(X))$  で定義する。 $F$  は  $TM$  の zero section の近傍から  $M \times M$  の  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$  の近傍への微分同相写像となることを示せ。

**【解】**

## 0.6 等長変換群

リーマン計量の一般論は、たとえばユークリッド空間の多様体上の測地線等を書き表すために必要ということもあるが、もっと積極的に多様体を考えるときにその多様体にもっとも適合したリーマン計量を考えることができることにある。リーマン計量をもつ多様体上で距離を不変に保つる等長変換を考えると多様体の性質が良くわかることも多い。

**定義 0.6.1** リーマン多様体  $(M, g_M)$ ,  $(N, g_N)$  に対し、微分同相写像  $F : M \rightarrow N$  が  $F^*g_N = g_M$  を満たすとき、 $F$  を等長変換 isometry と呼ぶ。ただし、 $F^*g_N$  は  $v_1, v_2 \in T_x N$  に対し、 $(F^*g_N)(v_1, v_2) = g_N(F_*v_1, F_*v_2)$  で定義され、 $M$  上のリーマン計量となる。

連結  $n$  次元リーマン多様体  $(M, g)$  に対して、 $(M, g)$  から自分自身への等長写像の全体は群になるが、それは高々  $\frac{n(n+1)}{2}$  次元の多様体となる。その理由は次のようなものである。

$x \in M$  に対し、 $T_x M$  の正規直交基底を考える。そのようなものはグラム・シュミットの直交化プロセスにより存在がわかるが、 $T_x M$  の 2 つの正規直交基底は  $n$  次直交群  $O(n)$  で写りあう。シュミットの直交化は、 $M$  の点  $x$  の近傍上で同時に行うことができるので、 $x$  のある座標近傍  $(U, \varphi)$  上で  $T_y M$  ( $y \in U$ ) の正規直交基底の全体は多様体  $U \times O(n)$  でパラメータ付けられている。これを  $M$  の各点の近傍で考えると、 $T_x M$  ( $x \in M$ ) の正規直交基底の全体は、多様体  $U \times O(n)$  の座標近傍により、 $\frac{n(n+1)}{2}$  次元の多様体  $\text{Fr } M$  となる。自然に定義される写像  $p : \text{Fr } M \rightarrow M$  について、 $p^{-1}(U)$  は

$U \times O(n)$  と微分同相で、ファイバー束の構造を持つこともわかる。 $\text{Fr } M$  を  $M$  の接正規直交  $n$  枠束 tangent orthonormal  $n$  frame bundle という。そこで、 $x_0 \in M$  および  $T_{x_0}M$  の正規直交基底  $E_0 = (e_1, \dots, e_n)$  を固定し、等長写像  $F : M \rightarrow M$  に対して、 $F_*E_0 = (F_*e_1, \dots, F_*e_n)$  は  $\text{Fr } M$  の元である。 $y \in M$  に対し、 $x_0$  から  $y$  への測地線  $E_{x_0}(tv)$  ( $v \in T_{x_0}M, E_{x_0}(v) = y$ ) をとると、 $F(E_{x_0}(tv)) = E_{F(x_0)}(tF_*v)$  だから、 $F(y) = E_{F(x_0)}(F_*v)$  となり、 $F$  は  $F_*E_0$  で定まる。従って、 $(M, g)$  から自分自身への等長変換の全体  $\text{Isom}(M)$  は  $\text{Fr } M$  に埋め込まれる。さて、 $\text{Isom}(M)$  が閉部分集合であることは容易にわかるが、部分多様体となることは自明ではない。

これは、Myers-Steenrod の定理と呼ばれている。証明にはもう少し予備知識も必要である。現在、多少抽象的ではあるがより簡明な証明として小林 [ ] のものがある。

**【例 0.6.2】**  $n$  次元単位球面の等長変換群は  $O(n+1)$  で、 $O(n+1)$  の次元は  $\frac{n(n+1)}{2}$  である。また、 $n$  次元ユークリッド空間の等長変換群は  $O(n) \times \mathbb{R}^n$  で、その次元も  $\frac{n(n+1)}{2}$  である。しかし  $m \neq n, m \geq 1, n \geq 1$  のとき、 $S^m \times S^n$  のリーマン計量を  $g_{S^m}, g_{S^n}$  の直和として、 $\text{Isom}(S^m \times S^n) = O(m+1) \times O(n+1)$  となる。

コンパクト連結 2 次元多様体  $M$  には、次のようなリーマン計量  $g$  が存在する。各点  $x \in M$  における長さ 1 の接ベクトル  $v$  に対し、近傍  $x \in U_v \subset M$  が定まり、 $v_1 \in T_{x_1}M, v_2 \in T_{x_2}M$  に対し、等長変換  $F_{v_1v_2} : U_{v_2} \rightarrow U_{v_1}$  で  $(F_{v_1v_2})_*v_2 = v_1$  となる。

このようなリーマン計量は、局所的にはきわめて対称性が高く、特に定曲率であることがわかる。

多様体の与えられたリーマン計量を変形してより良いリーマン計量を得るという問題の立て方が非常に自然である。この場合、多様体上でリーマン計量を変形するためには、多様体、リーマン計量と概念が純粹に定義される必要があった。

もともと与えられたリーマン計量  $g$  および正值の関数  $f$  に対し、 $fg$  もリーマン計量であるが、 $fg$  のスカラー曲率が一定とできるかという問題のは山辺の問題と呼ばれ、いくつかの場合には肯定的に解かれている。

3次元多様体に対しては、リッチ曲率流を考えてリーマン計量を変形することにより、3次元多様体を標準的なものに分解し、それぞれの部分がよくわかる幾何構造を持つようにできるという研究が Perelman 等により行われている。これが正しければ、Thurston の予想が肯定的に解かれ、その結果ポアンカレの予想も肯定的に解かれる。

## 0.7 リーマン計量の存在

コンパクトな多様体はユークリッド空間へ埋め込まれる (定理??) から、リーマン計量をもつが、リーマン計量の存在自体はもう少し簡明に証明できる。

**定理 0.7.1**  $n$ 次元コンパクト多様体上には、リーマン計量が存在する。

**証明**  $n$ 次元コンパクト多様体  $M$  の座標近傍系  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  をとる。有限部分被覆  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, k}$  であって、 $U_1 \supset \bar{V}_i \supset V_i$  となる  $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, k}$  が開被覆であり、 $U_i$  に台を持ち  $\bar{V}_i$  上で正となる非負関数  $\mu_i : M \rightarrow \mathbf{R}$  をとる。 $\varphi_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  とするとき、 $x \in U_i$  に対し、 $v = \sum_{i=1}^n v_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}} \in T_x M$  を  $\mu_i(x)q_i(v) = \sum_{i=1}^n (v_i^{(i)})^2$  で定義する。 $v \in T_x M$  ( $x \in M \setminus U_i$ ) のとき  $\mu_i(x)q_i(v) = 0$  と考えて、 $\mu_i q_i$  は  $TM$  上の  $C^\infty$  級関数であり、各  $T_x M$  上では2次形式である。 $q(v) = \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(v)$  とおくと、 $q$  は  $TM$  上の  $C^\infty$  級関数であり、各  $T_x M$  上では正値2次形式である。2次形式であることは、次のように容易にわかる。

$$q(av) = \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(av) = a^2 \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(v) = a^2 q(v)$$

$$q(u+v) - q(u) - q(v) = \sum_{i=1}^k \mu_i \{q_i(u+v) - q_i(u) - q_i(v)\}$$

であるが、 $\{q_i(u+v) - q_i(u) - q_i(v)\}$  が  $u, v$  について双1次形式であるから、その和も双1次形式である。さて、 $q(v) = 0$ ,  $v \in T_x M$  ならば、 $x \in V_i$  となる  $i$  に対して、 $v = \sum_{i=1}^n v_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}$ ,  $q_i(v) = \sum_{i=1}^n (v_i^{(i)})^2 = 0$  であり、 $v = 0$  とな

る。

有限群の作用を持つとき、その作用で不変なリーマン計量も存在する。

**【問題 0.7.2】**  $F$  をコンパクト多様体  $M$  の微分同相写像からなる有限群とする。 $M$  上のリーマン計量  $g$  で  $F$  の任意の元  $f$  について  $f^*g = g$  を満たすものがあることを示せ。

ヒント：1つのリーマン計量を取り、有限群の作用で移りあう点でのリーマン計量を平均する。

**【解】**  $F = \{f_1 = \text{id}, f_2, \dots, f_k\}$  とする。 $q : TM \rightarrow \mathbf{R}$  をリーマン計量を与える各接空間で2次形式を与える写像とする。 $\hat{q}(v) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k q((f_i)_*v)$  とおく。 $(f_i)_* : T_x M \rightarrow T_{f_i(x)} M$  は線形写像だから、 $q((f_i)_*v)$  は  $T_x M$  上では正值2次形式であり、その平均  $\hat{q}$  も  $T_x M$  上では正值2次形式である。従って  $\hat{q}$  は  $M$  上のリーマン計量  $g$  をあたえる。

$$\begin{aligned} (f^*q)(v) &= q(f_*v) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k q((f_i)_*f_*v) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k q((f_i f)_*v) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k q((f_i)_*v) = q(v) \end{aligned}$$

から、 $f^*g = g$  が従う。ここで、群  $F$  が  $\{f_1 f, f_2 f, \dots, f_k f\}$  と一致することを用いた。 $\frac{1}{k}$  は証明には必要がないが、平均を取るということは例えばコンパクト群ならば無限群でも定義される。従ってコンパクト群の作用で不変なリーマン計量があることの証明も同様である。

**【問題 0.7.3】** リーマン多様体の間の等距離変換はリーマン計量をリーマン計量に写す微分同相写像であることを示せ。すなわち  $f : M \rightarrow N$  が、 $d_{g_N}(f(x), f(y)) = d_{g_M}(x, y)$  を満たせば、 $f$  は微分可能で  $g_N(f_*v_1, f_*v_2) = g_M(v_1, v_2)$  を満たすことを示せ。

**【解】** リーマン多様体の間の等距離変換は同相写像であるが、測地線を測地線に写すことがわかる。従って、 $F : TM \rightarrow TN$  が定まる。方向微分が方向微分に写るが写像が各方向に微分可能であることが分かる。ひとつの測地線  $\gamma(t)$  ( $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ ) で  $v = \frac{d\gamma}{dt}(0) \in T_x M$  が与えられているとすると、 $v$  の  $TM$  における近傍は  $\gamma(-\epsilon)$  の小近傍から  $\gamma(\epsilon)$  の小近傍への測地線の定める

接ベクトルの全体として表される。この測地線の像の測地線は  $F(v)$  の  $TN$  における近傍に含まれるから  $F$  は連続である。

$E_x : T_x M \rightarrow M$  は局所微分同相である。 $v_1, v_2 \in T_x M$  に対して、 $E_x(sv_1)$ ,  $E_x(sv_2)$  を結ぶ最短測地線分  $\ell_s$  は  $E_x^{-1}$  により  $T_x M$  の  $C^\infty$  級曲線族となる。 $E_x(sv_1)$ ,  $E_x(sv_2)$  を  $1-t : t$  に内分する  $\ell_s$  上の点を  $p_{s,t}$  とし、 $w_{s,t} = E_x^{-1}(p_{s,t})$  とすると  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w_{s,t}}{s} = tv_1 + (1-t)v_2$  となる。

このことから、 $F$  は線形である。従って、 $f$  は微分可能で  $F$  が接写像である。このとき、 $g_N(f_*v_1, f_*v_2) = g_M(v_1, v_2)$  となる。

リーマン多様体をユークリッド空間にうまく埋め込んでリーマン計量がユークリッドの計量からひきおこされたものと一致するようにできるかどうかは Nash により解決された。

## 0.8 ユークリッド空間の超曲面の測地線

$f(\mathbf{x}) = 0$  で与えられた超曲面の測地線は比較的わかりやすい。超曲面上をできるだけまっすぐに進むということは、速度の変化は、超曲面の法線の方角であることである。

測地線の微分方程式は次のように立てられる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_i \\ \frac{dv_i}{dt} &= a(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

ここで、 $f(\mathbf{x}(t)) = 0$  を微分して  $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t))v_i(t) = 0$  を得る。このとき、速さが不変であることも次のようにしてわかる。

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i v_i^2 \right) = 2 \sum_i \frac{dv_i}{dt} v_i = 2 \sum_i a(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) v_i(t) = 0.$$

$f(\mathbf{x}(t)) = 0$  を 2 回微分して、

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}(t)) v_i(t) v_j(t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \frac{dv_i}{dt}(t) = 0$$

を得る。この式に  $\frac{dv_i}{dt} = a(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t))$  を代入して、

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i(t) v_j(t) + a(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

を得る。従って、

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = - \frac{\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{x}(t)) v_i(t) v_j(t)}{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} (\mathbf{x}(t)) \right)^2}$$

と書かれる。

測地線の微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_i \\ \frac{dv_k}{dt} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k} (\mathbf{x}(t))}{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} (\mathbf{x}(t)) \right)^2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{x}(t)) v_i(t) v_j(t) \end{aligned}$$

たとえば  $z = h(x_1, x_2)$  とグラフ表示される曲面では、 $f = -h(x_1, x_2) + z$  ととることができ、

$$\frac{dv_i}{dt} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}}{1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} v_2^2 \right)$$

( $i = 1, 2$ ) となる。

前に示した測地線の方程式はもっと複雑そうに見えるが、同じものになる。

実際、 $\mathbf{R}^{n+1}$  内の曲面  $z = h(\mathbf{x})$  に対し、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  を局所座標としてとると、 $g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j}$  であるが、これから

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

となる。従って、次の  $i, j$  についての和をとるときに後ろの2項は打ち消しあうことから、

$$\sum_i g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$$

は、

$$\sum_i g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$$

と書かれる。

$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j}$  について、 $(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n})$  は固有値  $1 + \sum_i (\frac{\partial h}{\partial x_i})^2$  に対する固有ベクトルである。実際、

$$\sum_j g_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_j (\delta_{ij} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j}) \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial h}{\partial x_i} (1 + \sum_i (\frac{\partial h}{\partial x_j})^2)$$

である。従って、 $g_{ik}$  の逆行列  $g^{\ell k}$  について

$$\sum_k g^{\ell k} \frac{\partial h}{\partial x_k} = \frac{1}{1 + \sum_i (\frac{\partial h}{\partial x_j})^2} \frac{\partial h}{\partial x_\ell}$$

となり、

$$\frac{dv_\ell}{dt} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial x_\ell}}{1 + \sum_i (\frac{\partial h}{\partial x_i})^2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j$$

を得る。

前に示したものは、リーマン計量  $g$  のみに依存していたことが重要である。