１２月１７日７２２教室　１４：４０－１６：１０
次回は、１月１４日、その次は１月２１日
先週までの復習：

1. 数と量

2. 小数

3. 無限和

4. 無限個とはどういうことか

4.1.　区間の点の個数は自然数の個数よりも大きい。
どうやって比べるか？

4.2.　$f : A \longrightarrow B$ を写像とする。$a \in A$ に対し、$b = f(a) \in B$ が定まるときに写像という。
$f : A \longrightarrow B$ が全射とは、どのような $b \in B$ に対しても、$f(a) = b$ となるような $a \in A$ が存在することである。
$f : A \longrightarrow B$ が単射とは、$a \in A,\ a' \in A$ に対し $f(a) = f(a') \in B$ ならば、$a = a'$ となることである。
$f : A \longrightarrow B$ が全単射とは、全射かつ単射であること。

4.3.　$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ を $f(x) = x^2$ とすると、これは単射。
$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ を $f(x) = [\sqrt{x}]$ ($[a]$ は a の整数部分）とすると、これは全射。

4.4.　有限集合 A について、自分自身への写像 $f : A \longrightarrow A$ を考えると、f が単射ならば、全単射である。

4.5.　無限集合 A に対し、全射でない単射 $f : A \longrightarrow A$ が存在する。

4.6.　２つの無限集合 $A,\ B$ の元の個数が等しいことを、全単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在することで定義する。

4.7.　有限小数の全体の個数は、自然数の個数と同じである。

4.8.　有理数の全体の個数は、自然数の個数と同じである。

4.9.　自然数の個数を可算無限個と呼ぶ。

4.10.　平面の x, y 座標がともに整数の点は可算無限個である。
平面の x, y 座標がともに有理数の点は可算無限個である。

4.11.　区間の点の個数は、長さに依らず等しい。
円の上の点の個数は、半径に依らず等しい。

4.12.　さて、「区間の点の個数は自然数の個数よりも大きい。」ことを示すために、１０進小数と実数との対応をきちんと定める。

$[0,1)$ の点は、小数に書かれる。

$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{10^i}$ が等しくなるのは、小数第 j 位 $a_j \neq 9$, その後ろの $k > j$ に対し $a_k = 9$, $b_j = a_j + 1$, その後ろの $k > j$ に対し $b_k = 0$ のとき (または α, β を入れ替えた場合）に限る。

なぜなら、小数第 j 位よりも左は等しく、小数第 j 位が最初に異なるとする。$a_j < b_j$ とする。このとき、$k \geqq j$ について、$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{10^i} < \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{10^i}$ だから、$\alpha \leqq \beta$.

$a_j + 1 < b_j$ ならば、$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{10^i} < \sum_{i=1}^{j} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^j} < \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{10^i} \leqq \beta$ だから、$\alpha + \frac{1}{10^j} \leqq \beta$

$a_j+1 = b_j$ とする。このとき、$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{10^i} < \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{10^i}$ だから、$\alpha \leqq \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{10^i}$. $k > j$ に対し、$b_k \neq 0$ ならば、$\alpha + \frac{1}{10^k} \leqq \beta$. 従って、$\alpha = \beta$ ならば $k > j$ に対し $b_k = 0$.

$k > j$ に対し、$a_k \neq 9$ ならば、$\alpha + \frac{1}{10^k} \leqq \beta$. 従って、$\alpha = \beta$ ならば $k > j$ に対し $a_k = 9$.

4.13.　さて、「区間の点の個数は自然数の個数よりも真に大きい。」ことを示す。

同じ個数として矛盾を導く。

同じ個数ならば、区間の点を並べることができる。その表示を

$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\dots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\dots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\dots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\dots$
$\dots$

a_{ij} は $0, \dots, 9$ である。あるところから 9 が続く表示はとらないことにする。

ところが、$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\dots$
を $b_{kk} = 9 - a_{kk}$ とすると、
あるところから $a_{kk} = 0$ が続く場合を除いて、
$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\dots$

に対応する点は、並べた元の k 番目とは、k 番目の数字が異なるから、並べられていない。これは全て並べたことに矛盾する。

あるところから $a_{kk}=0$ が続く場合は、そこから 0, 9 以外の数字を並べたもの

$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\ldots$

を考える。

従って、$[0,1)$ の元のすべてを自然数に対応して 1 列に並べることは出来ない。従って、$\#\mathbf{N} < \#[0,1)$ である。

4.14.　区間から $\dfrac{1}{3}$ を除いていく構成は、3 進小数で、1 を使わないで表されるもの全体と一致する。

$C=\{\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{a_i}{3^i}\mid a_i=0,2\}$

注意。$(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{3^i})+\dfrac{1}{3^n}=(\sum_{1=1}^{n}\dfrac{a_i}{3^i})+\sum_{j=n+1}^{\infty}\dfrac{2}{3^j}$

C の元の数も、可算無限個よりも大きい。

4.15.　C の元の数と、実数の個数は等しい。

4.16.　平面の点の点の個数は、直線の点の個数と等しい。

4.17.　ベルンシュタインの定理。

$\exists f: A \rightarrowtail B$ かつ $\exists g: B \rightarrowtail A$ ならば、$\exists$ 全単射 $h: B \longrightarrow A$.

4.18.　全射 $f: A \longrightarrow B$ があれば、A の元の個数は、B の元の個数とよりも多いといってよいか？

すなわち、$A \longrightarrow B$ があれば、単射 $B \longrightarrow A$ があるか？

これは、$b \in B$ に対して、$\{a \in A \mid f(a)=b\} \neq \emptyset$ の元を 1 個とることにより、定義出来そうである．

これを全ての $b \in B$ に対し同時に行なうことが出来る、すなわち、$g: B \longrightarrow A$ で $f(g(b))=b$ となるものが存在するという命題を、選択公理と呼ぶ．この g は単射である．$g(b)=g(b') \implies f(g(b))=f(g(b'))$、すなわち $b=b'$.

4.19.　選択公理は、現代の数学ではほぼ認められ使われているが，選択公理と異なる公理を採用することも出来る．