１２月１０日７２２教室　１４：４０－１６：１０
次回は、１２月１７日、その次は1月１４日、１月２１日
先週までの復習：

1. 数と量

2. 小数

3. 無限和

3.1.　正の実数 a_k に対し、そのうちの有限個の和の全体のなす集合 A を考え、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup A$ としたのであった。

3.2.　$\{a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots\} = \{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\}$ を考えると、これは単調に増加する数列である。前に与えた意味の無限和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は $\sup\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\}$ と等しくなる。

3.3.　収束する正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の項 a_k は、大きいものから順にならべることはできるが、小さいものから順にならべようとすると、最初が定まらない。

無限個を並べるというとき、最初が定まり、次は、次は、…と定まるようになっていなければならない。また、１つのものの１つ前のものは何かということも定まる必要がある。

このような並べ方を考えているときには、奇数を最初に数えて、偶数を後で数えるというのは、許されない。しかし、これも和をとるときには正当化される。

3.4.　正項級数の和。

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

3.5.　正項級数の積。

$$(\sum_{j=1}^{\infty} a_j)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k) = \sum a_j b_k$$

3.6.　まとめ。正の実数の可算和は、連続の公理のもと、実数として意味を持ち、
　可算和の和＝和の可算和
　可算和の積＝積の可算和
　となる。

3.7.　正の長さの線分を順に隙間なく並べて、近づく長さ
　あるいは、正の長さの線分を一挙に並べた長さ
　が並べ方に依らない。

3.8.　長さの積は、面積と考えられる。「可算和の積＝積の可算和」はそれを表している。

3.9.　隙間なく並べる方法には、色々あると思われる。例えば、直角三角形の内部に長方形を取っていくと、
　$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^3} + \ldots$

3.10.　線分に対し、中央の $\frac{1}{3}$ ずつ取り除いていく。
　１回目取り除くのは　$\frac{1}{3}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{1}{3}$
　２回目取り除くのは　$2 \cdot \frac{1}{3^2}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{1}{3^2}$
　３回目取り除くのは　$2^2 \cdot \frac{1}{3^3}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{1}{3^3}$
　４回目取り除くのは　$2^3 \cdot \frac{1}{3^4}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{1}{3^4}$
　取り除く区間の長さの和は、$\dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$
　残りの区間１つの長さ $\to 0$
　残りの区間全体の長さ $\frac{2^k}{3^k} \to 0$

3.11.　線分に対し、中央の $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}$ と、取り除いていく。
　１回目取り除くのは　$\frac{1}{4}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{3}{8}$
　２回目取り除くのは　$2 \cdot \frac{1}{4^2}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{5}{32}$
　３回目取り除くのは　$2^2 \cdot \frac{1}{4^3}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{9}{128}$
　４回目取り除くのは　$2^3 \cdot \frac{1}{3^4}$　残りの区間１つの長さ　$\frac{17}{512}$

k 回目取り除くのは　$2^{k-1}\cdot\dfrac{1}{3^k}$　残りの区間１つの長さ　$\dfrac{2^k+1}{2^{2k+1}}$
（数学的帰納法）

取り除く区間の長さの和は、$\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

残りの区間１つの長さ $\dfrac{2^k+1}{2^{2k+1}}\to 0$

残りの区間全体の長さ $2^k\cdot\dfrac{2^k+1}{2^{2k+1}}\to\dfrac{1}{2}$

3.12.　このような計算に意味があるか？

3.13.　もっと基本的な問題。
　線分は点から成立っている。点の長さは 0.
　区間を半分半分に分割していく。長さが 0 の部分に分かれる？
　区間を有理数の点で分ける。長さが 0 の無理数からなる部分に分かれる？

3.14.　無限個にも色々あって、区間の点の個数は、可算個ではなくもっと多い無限個と思うと、0 を加算個加えても 0 ということに矛盾せず長さが考えうる。

4. 無限個とはどういうことか

4.1.　これまで、自然数の全体は、無限個の元を持つことが、無限和の収束の問題を引きおこすことを述べた。

4.2.　問。無限個の元を持つこと、有限個の元を持つこととはどういうことであろうか？
　個数を数えるとはどういうことだろうか？

4.3.　例。玉入れの判定。
　「順に取り出す操作」が定まっている。
　「１つの差」ということも定義できる。

4.4.　「有限個とは順に取り出す操作が終わること。」
　「無限個とは順に取り出す操作が終わらないこと。」
　と考えてよいか？

4.5.　自然数の全体は無限個。

4.6.　素数の全体は無限個。
　なぜなら、$p_1,\ldots,p_k$ が素数の全てとすると、これら以外のどのような自然数もこれらのどれかで割り切れる。
　$p_1\ldots p_k+1$ を考えると、$p_1,\ldots,p_k$ のどれでも割り切れない。

4.7.　有理数を小数に直すと循環小数になることを示すのに、余りの値が有限個であることを使った。

4.8.　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ の和の順序を変えて、どのような値にも収束させることができることは、偶数奇数が無限にあることを使っている。

4.9.　区間の点の個数は自然数の個数よりも大きい。
　どうやって比べるか？

4.10.　$f : A \longrightarrow B$ を写像とする。$a \in A$ に対し、$b = f(a) \in B$ が定まるときに写像という。
　$f : A \longrightarrow B$ が全射とは、どのような $b \in B$ に対しても、$f(a) = b$ となるような $a \in A$ が存在することである。
　$f : A \longrightarrow B$ が単射とは、$a \in A,\ a' \in A$ に対し $f(a) = f(a') \in B$ ならば、$a = a'$ となることである。
　$f : A \longrightarrow B$ が全単射とは、全射かつ単射であること。

4.11.　$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ を $f(x) = x^2$ とすると、これは単射。
　$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ を $f(x) = [\sqrt{x}]$ ($[a]$ は a の整数部分）とすると、これは全射。

4.12.　有限集合 A について、自分自身への写像 $f : A \longrightarrow A$ を考えると、f が単射ならば、全単射である。
　有限集合を $\{1, \dots, n\}$ と同じ個数をもつものと考え、数学的帰納法が成立つとすると、示すことができる。
　$f : \{1, \dots, n+1\} \longrightarrow \{1, \dots, n+1\}$.
　$f(n+1) = n+1$ ならば、f を単射としたから、$f(1),\ \dots,\ f(n) \in \{1, \dots, n\}$. 数学的帰納法の仮定から、$\{f(1), \dots, f(n)\} = \{1, \dots, n\}$ であり、f は全射。
　$f(n+1) = m \neq n+1$ とする。
　$g(k) = k,\ (k \neq m,\ n+1)\ g(m) = n+1,\ g(n+1) = m$ という互換 g は全単射。
　$(g \circ f)(k) = g(f(k))$ とすると、$g \circ f$ は単射であり、$(g \circ f)(n+1) = n+1$。従って、$g \circ f$ は全射。ゆえに f は全射。

4.13.　無限集合 A に対し、全射でない単射 $f : A \longrightarrow A$ が存在する。
　「順に取り出して、取り出す操作が終わらない」ことが無限集合の定義とすると、その取り出していくものについて、k 番目のものを $k+1$ 番目に写し、取り出されない元に対してはそれ自身を対応させる写像が、求めるものである。
　これは、無限集合の個数は、自然数の個数より大きいことを意味している。

$A \setminus f(A)$ の元 a に対し、$a, f(a), f(f(a)), \ldots$ は全て異なる元となり、自然数から A への単射があることを意味している。