６月２５日

9. 線形性とその応用

9.1. 簡単な偏微分方程式の特別な解. 偏微分方程式とは偏導関数の間の関係を記述したものである。その特別な形の解を求める問題は常微分方程式の問題になることがある。

以下について $u(x,t)=f(x-ct)$ の形の解を求める。

熱方程式. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

$-cf'(x-ct)=f''(x-ct)$ だから、$x-ct=z$ とおいて $-cf'(z)=f''(z)$. $-cz=\log f'(z)+k$. $f=Ae^{-cz}+B$. $u(x,t)=Ae^{-c(x-ct)}+B$ という形の解がある。

波動方程式. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$c^2f''(x-ct)=f''(x-ct)$ だから、$c=\pm 1$, $f_1(x-t)+f_2(x+t)$ という形の解がある。

電信方程式. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$c^2f''(x-ct)=f''(x-ct)-2cf'(x-ct)$ だから、$x-ct=z$ とおいて $(c^2-1)f''(z)+2cf'(z)=0$. $2cz+(c^2-1)\log f'(z)=k$. $f=Ae^{-(2c/(c^2-1))z}+B$. $u(x,t)=Ae^{-(2c/(c^2-1))(x-ct)}+B$ という形の解がある。

9.2. 線分、円上の熱方程式.

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が $t>0$, $0\leqq x\leqq\pi$ または $x\in\mathbf{R}$ で成立しているとし、$u(x,0)=f(x)$ がわかっているとき、$u(x,t)=X(x)T(t)$ の形の解を求めることを考える。物理的な問題は、偏微分方程式で与えられても解が１つしかない事が期待されるから、このような解が求まれば、方程式が現象を正しく説明しているかぎり、正しい解であると考えられる。

偏微分方程式の解で特別な形のものがあるかどうか調べる。$u(x,t)=X(x)T(t)$ とすると、$X(x)\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}^2x}T(t)$ を得る。$\dfrac{\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}}{T(t)}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}^2x}}{X(x)}$ であるから、左辺、右辺ともに定数 k である。

$\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=kT(t)$ となる関数は $T(t)=Ce^{kt}$ である。ここで $k<0$ である。

$\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}^2x}=kX(x)$ $(k<0)$ となる $\mathbf{R}$ 上の関数は、$\sin\sqrt{-k}x$, $\cos\sqrt{-k}x$ の１次結合である。ところが、初期値が $\sin\sqrt{-k}x$, $\cos\sqrt{-k}x$ の１次結合でない限りは、これは解にならない。

$u(x,t)=X(x)T(t)$ で方程式を満たすものを $X_\lambda(x)T_\lambda(t)$ の形で求め、それらの和あるいは積分が初期条件を満たすようにできるかを考える。

この後の考察は、境界条件により異なる。

まず円の場合を考えよう。$u(x,t) = u(x+2\pi,t)$ が常に成立しているとする。$u(x,t) = X(x)T(t)$ とすると、$X(x+2\pi) = X(x)$ を満たす。$\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}^2x} = kX(x)$ の解は、周期 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-k}}$ を持っているから、解が存在するのは $-k = n^2$ となる整数がある場合で、解は $\sin nx, \cos nx$ の１次結合である。

従って、$k = -n^2$ のとき、解は $a_n e^{-n^2t}\sin nx + b_n e^{-n^2t}\cos nx$ となる。$t = 0$ のとき、$u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2t}\sin nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-n^2t}\cos nx$ が解となるためには $t = 0$ のとき、$f(x)$ とならなければならない。$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ $(n > 0)$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ $(n > 0)$, $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ によって a_n, b_n を定めると、$f(x)$ が C^1 級ならば、$u(x,0)$ は $f(x)$ に収束する。従って上の級数が解となる。

線分 $0 \leqq x \leqq \pi$ において、$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ という条件（線分の両端での温度が 0 度に強制的になっている）を考える。このとき、$u(x,t) = X(x)T(t)$ とすると、$X(0) = X(\pi) = 0$ を満たす。$\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}^2x} = kX(x)$ の解は、周期 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-k}}$ を持っているから、解が存在するのは $-k = n^2$ となる整数がある場合で、解は $\sin nx$ の１次結合である。従って、解は $a_n e^{-n^2t}\sin nx$ となる。$u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2t}\sin nx$ が解となるためには $t = 0$ のとき、$f(x)$ とならなければならない。$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ $(n > 0)$, によって a_n を定めると、$f(x)$ が C^1 級ならば、$u(x,0)$ は $f(x)$ に収束する。従って上の級数が解となる。

線分 $0 \leqq x \leqq \pi$ において、$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ という条件（線分の両端での温度の傾斜がなく熱が出入りしない）を考える。このとき、$u(x,t) = X(x)T(t)$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}(0) = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}(\pi) = 0$ を満たす。$\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}^2x} = kX(x)$ の解は、周期 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-k}}$ を持っているから、解が存在するのは $-k = n^2$ となる整数がある場合で、解は $\cos nx$ の１次結合である。従って、解は $b_n e^{-n^2t}\cos nx$ となる。$u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-n^2t}\cos nx$ が解となるためには $t = 0$ のとき、$f(x)$ とならなければならない。$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ $(n > 0)$, によって b_n を定めると、$f(x)$ が C^1 級ならば、$u(x,0)$ は $f(x)$ に収束する。従って上の級数が解となる。

9.3. 変数係数線形常微分方程式.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ を考える。$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} = 0$ のとき同次形というが、このとき解の空間は、n 次元ベクトル空間である。すなわち $t = t_0$ における

初期値 $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ によって解は定まり、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = G(t) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ と書かれる。ただし $G(t_0) = I$（単位行列）である。. ここで、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ となる。$G(t)$ の第 j 列は $\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ を初期値とする解である。

$\det G(t)$ を知ることは、解についていくつかの予測をする上で重要である。すなわち、$\det G(t)$ は t_0 における体積 1 のものが t においてどうなっているかを示す。もしも、$t \to \infty$ のときにすべての解が 0 に収束するならば、$\det G(t) \to 0$ となるはずである。

このとき、

定理 (リウビルの公式)。 $\det G(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$ **が成立する。**

言葉をかえて言うと、$\det G(t)$ は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det G(t) = \mathrm{tr}A(t) \det G(t)$, $\det G(t_0) = 1$ を満たす。すなわち、$\det G(t)$ は、常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{tr}A(t)x$, $\det x(t_0) = 1$ の解である。

実際 $G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ であるとする ($g_i(t)$ は第 i 行) と、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_i(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)g_j(t)$ ということである。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det G(t) \\
&= \det \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} + \cdots + \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)g_j(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}(t)g_j(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} + \cdots + \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)g_j(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t) \det \begin{pmatrix} g_j(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}(t) \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_j(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_j(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t) \det \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} = \mathrm{tr}A(t) \det G(t)
\end{aligned}
$$

注意。$A(t) = A$, $G(t) = e^{tA}$ のとき、$\det e^{tA} = e^{t\ \mathrm{tr}A}$ となる。これはジョルダン標準形からも容易に示される。

言葉。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y}$ の解 $\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ が一次独立のとき、$\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ を一組の基本解あるいは解の基本系と呼ぶ。

基本解を並べた行列 $G(t)$ を基本解行列と呼ぶ。$G(0) = I$ となるとは限らない。

２つの基本解行列 $G_1(t), G_2(t)$ に対し、$B = G_1(t_0)^{-1}G_2(t_0)$ とおくと、$G_2(t) = G_1(t)B$.

注意。基本解行列 $G(t)$ に対し、$\det G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{tr}A(t)x$ を満たし、$\det G(t) = e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}\det G(0)$ となるから、$\det G(t)$ の変化の割合 $e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$ は、基本解行列 $G(t)$ のとり方によらない。

随伴線形微分方程式. 基本解行列 $G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ を満たす。ここで、逆行列を考える。$G(t)^{-1} = H(t)$ とすると $I = G(t)H(t)$ を微分して、

$$\begin{aligned}0 &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t))H(t) + G(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)) \\ &= A(t)G(t)H(t) + G(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)) \\ &= A(t) + G(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))\end{aligned}$$

従って $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t) = -H(t)A(t)$. 転置行列をとれば $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^tH(t) = -{}^tA(t)\,{}^tH(t)$.

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} = -{}^tA(t)\vec{z}$ の基本解行列の１つは ${}^tG(t)^{-1}$ で与えられる。

この微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} = -{}^tA(t)\vec{z}$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y}$ に**随伴する**線形微分方程式と呼ばれる。

線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y}$ と、それに随伴する線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} = -{}^tA(t)\vec{z}$ の解、$\vec{y}(t), \vec{z}(t)$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{z}(t)\bullet\vec{y}(t)) = (-{}^tA(t)\vec{z}(t))\bullet\vec{y}(t) + \vec{z}(t)\bullet(A(t)\vec{y}(t)) = 0$$

となる。従って、$\vec{z}(t)\bullet\vec{y}(t)$ の値は一定である。

特に、$A(t)$ が交代行列 $({}^tA(t) = -A(t))$ であれば、$\|\vec{y}(t)\|$ は定数となり、$G(0) = I$ となる基本解行列 $G(t)$ は直交行列となる。実際、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^tG(t)G(t)) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^tG(t))G(t) + {}^tG(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)) \\ &= {}^tG(t)\,{}^tA(t)G(t) + {}^tG(t)A(t)G(t) = 0\end{aligned}$$

で、${}^tG(0)G(0) = I$ だから、${}^tG(t)G(t) = I$.

「随伴する」という考え方は、$L = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A(t) : \mathrm{Map}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathrm{Map}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ と内積 $\langle\vec{f}, \vec{g}\rangle = \displaystyle\int_a^b \vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\mathrm{d}t$ について $\langle L^*\vec{f}, \vec{g}\rangle = \langle\vec{f}, L\vec{g}\rangle$ すなわち、普通の行列だったら、（共役）転置行列となるものを考えるということである。随伴するものと等しければ、対称行列と同様の良い性質を持つことが期待でき、随伴するものと合わせて 0 になれば、反対称行列と同様の良い性質を持つことが期待できる。

$$
\begin{aligned}
&\langle \vec{f}, L\vec{g} \rangle \\
&= \int_a^b (\vec{f} \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t} - \vec{f} \bullet (A(t)\vec{g}))\mathrm{d}t \\
&= \left[\vec{f} \bullet \vec{g} \right]_a^b - \int_a^b (\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} \bullet \vec{g} + ({}^tA(t)\vec{f}) \bullet \vec{g})\mathrm{d}t \\
&= \langle L^*\vec{f}, \vec{g} \rangle
\end{aligned}
$$

だから、a, b で $\vec{0}$ になる関数を扱っていれば、$L^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - {}^tA(t)$ となる。

ここで、$a,\ b$ で $\vec{0}$ とならない場合についても $L^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - {}^tA(t)$ として書いた $\langle \vec{f}, L\vec{g} \rangle - \langle L^*\vec{f}, \vec{g} \rangle = \left[\vec{f} \bullet \vec{g} \right]_a^b$, すなわち

$$\vec{f}(b)\bullet\vec{g}(b) - \vec{f}(a)\bullet\vec{g}(a) = \int_a^b \{\vec{f}(t)\bullet(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{g}(t) - A(t)\vec{g}(t)) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{f}(t) + {}^tA(t)\vec{f})\bullet\vec{g}(t)\}\mathrm{d}t$$

を**グリーンの公式**と呼ぶ。

非同次の場合。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ に対して、定数変化法を試みることが出来る。基本解行列 $G(t)$ について、$\vec{y}(t) = G(t)\vec{z}(t)$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G(t)\vec{z}(t)) = A(t)G(t)\vec{z}(t) + G(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t) = A(t)G(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t)$$

を得る。

従って $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t) = G(t)^{-1}\vec{b}(t)$ となるように $\vec{z}(t) = \int_{t_0}^t G(s)^{-1}\vec{b}(s)\mathrm{d}s$ とすればよい。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{b}_i(t)$ の解 $\vec{y}_i(t)$ が見つかっているとき、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \sum_{i=1}^N c_i\vec{b}_i(t)$ の解は $\sum_{i=1}^N c_i\vec{y}_i(t)$ で与えられる。（重ね合わせの原理）

周期的な係数を持つ線形常微分方程式。

変数係数線形常微分方程式で最も面白いのものは $A(t)$ が周期的であるときである。$A(t+T) = A(t)$. このとき、$G(t+T) = G(t)B$ となる。$G(t+NT) = G(t)B^N$ だから、B を求めることが出来れば、解の様子はかなり良くわかる。B はフロケ Floquet の行列と呼ばれる。