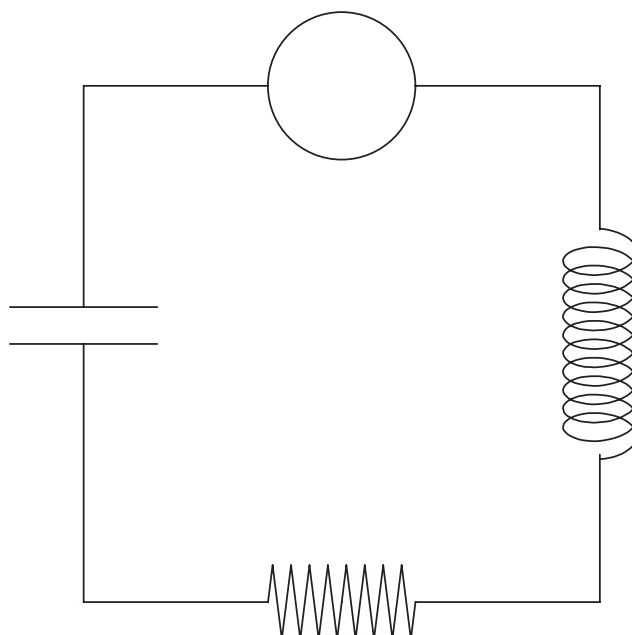


## 8.4. 古典的電気回路.



キャパシター (capacitor コンデンサー)、コイル (inductor)、回路の抵抗 (resistor)、からなる電気回路を考える。

- 抵抗は、 $E = RI$  を満たす。 $R$  は抵抗 (レジスタンス) と呼ばれる。
- 電流  $I$  に対して、キャパシターは、両端の電位差  $E$  が、電荷 (チャージ)  $Q$  に比例し、 $Q = CE$ ,  $I = \frac{dQ}{dt}$  を満たす。従って、 $I = C \frac{dE}{dt}$  を満たす。 $C$  はキャパシタンスと呼ばれる。
- 電流  $I$  に対して、コイルは、両端の電位差  $E$  が、 $L \frac{dI}{dt} = E$  を満たす。 $L$  はインダクタンスと呼ばれる。

円の部分には外部電圧  $E_0 \cos \omega t$  を交流でかける予定である。

キルヒホッフの法則 (電流は同じ量であることを参考にして) 流れる電流  $I$  は、キャパシター (コンデンサー)、コイル、回路の抵抗について等しい。

円の両端の電位差  $E$  は  $E = E_C + E_R + E_L$  である。これについて、

$$C \frac{dE_C}{dt} = I, L \frac{dI}{dt} = E_L, E_R = RI$$

回路には時計回りに向きが付いているとして

$$E = E_C + E_R + E_L = E_C + RC \frac{dE_C}{dt} + LC \frac{d^2 E_C}{dt^2}$$

交流の電位を与えると、 $x = E_c$  の微分方程式として、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x = \frac{E_0}{LC} \cos \omega t$$

を得る。

特性方程式は、 $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ . 特性解 (特性方程式の解) は

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \right) = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}$$

特性解 (特性方程式の解) は、固有値は2つの負の実数  $\alpha_1, \alpha_2$  であるか、固有値が1つの負の実数  $\alpha$  となるか、実部が負の共役複素数  $\mu \pm \nu i$  である。

従って、同次方程式の解  $x(t)$  は、 $a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}$ , または、 $a_1 e^{\alpha t} + a_2 t e^{\alpha t}$ , または、 $e^{\mu t} (a_1 \cos \nu t + a_2 \sin \nu t)$  の形となる。

従って  $t \rightarrow \infty$  のとき、急速に  $x(t) \rightarrow 0$  となる。

非同次方程式の解を1つ見つけると、すべての解はこの解に近づく。

以前に求めた式で考えると、非同次方程式の解の1つは、2つの特性解をもつときは、次で求められる。

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{E_0}{2LC} \int_0^t (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-t\alpha_1} dt + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{E_0}{2LC} \int_0^t (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-t\alpha_2} dt \\ &= -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{E_0}{2LC} \left[ \frac{e^{t(i\omega - \alpha_1)}}{i\omega - \alpha_1} + \frac{e^{t(-i\omega - \alpha_1)}}{-i\omega - \alpha_1} \right]_0^t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{E_0}{2LC} \left[ \frac{e^{t(i\omega - \alpha_2)}}{i\omega - \alpha_2} + \frac{e^{t(-i\omega - \alpha_2)}}{-i\omega - \alpha_2} \right]_0^t \end{aligned}$$

この式の0での値に関する部分は、同次方程式の解だから、非同次方程式の解の1つは、2つの特性解をもつときは、

$$\begin{aligned} & \frac{E_0}{2LC(\alpha_2 - \alpha_1)} \left\{ -\frac{e^{ti\omega}}{i\omega - \alpha_1} - \frac{e^{-ti\omega}}{-i\omega - \alpha_1} + \frac{e^{ti\omega}}{i\omega - \alpha_2} + \frac{e^{-ti\omega}}{-i\omega - \alpha_2} \right\} \\ &= \frac{E_0}{2LC(\alpha_2 - \alpha_1)} \left\{ \left( -\frac{1}{i\omega - \alpha_1} + \frac{1}{i\omega - \alpha_2} \right) e^{ti\omega} + \left( -\frac{1}{-i\omega - \alpha_1} + \frac{1}{-i\omega - \alpha_2} \right) e^{-ti\omega} \right\} \\ &= \frac{E_0}{2LC(\alpha_2 - \alpha_1)} \left\{ \frac{-i\omega + \alpha_2 + i\omega - \alpha_1}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)} e^{ti\omega} + \frac{i\omega + \alpha_2 - i\omega - \alpha_1}{(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2)} e^{-ti\omega} \right\} \\ &= \frac{E_0}{2LC} \left\{ \frac{e^{ti\omega}}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)} + \frac{e^{-ti\omega}}{(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2)} \right\} \\ &= \frac{E_0}{2LC} \left\{ \frac{e^{ti\omega}}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} + \frac{e^{-ti\omega}}{-\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} \right\} \end{aligned}$$

電流を求めると、

$$\begin{aligned} I &= C \frac{dx}{dt} = \frac{E_0}{2L} \left\{ \frac{i\omega e^{ti\omega}}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} + \frac{-i\omega e^{-ti\omega}}{-\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} \right\} \\ &= \frac{C\omega E_0}{2} \left\{ \frac{ie^{ti\omega}}{-LC\omega^2 + iRC\omega + 1} + \frac{-ie^{-ti\omega}}{-LC\omega^2 - iRC\omega + 1} \right\} \\ &= \frac{C\omega E_0}{2} \left\{ \frac{(RC\omega - (LC\omega^2 - 1)i)e^{ti\omega}}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2 C^2 \omega^2} + \frac{(RC\omega + (LC\omega^2 - 1)i)e^{-ti\omega}}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2 C^2 \omega^2} \right\} \end{aligned}$$

振幅は  $\frac{C\omega E_0}{\sqrt{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}$ 、位相のずれ  $\phi$  について、 $\tan \phi = -\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}$ .

抵抗がゼロ ( $R = 0$ ) ならば、同次方程式の解は、 $\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t$  の線形結合になる。ここで  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  である。 $(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2 C^2 \omega^2 = L^2 C^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2$

となるから、振幅は  $\frac{\frac{E_0}{L}}{\sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2} + \frac{R^2}{L^2}}}$ .  $\omega$  が  $\omega_0$  に近づくとときには、電流の振幅は  
 最大値  $\frac{E_0}{R}$  に近づく。

このような場合、重要なことは、非同次方程式の解をひとつ求めることであることとなる。

### 8.5. 演算子法または記号法.

$\frac{d}{dt}$  を  $D$  と書くと、 $D$  は微分可能な関数に対してその導関数を対応させる写像である。

$$D : C^\infty \longrightarrow C^\infty$$

ここで、 $C^\infty$  は無限回微分できる関数の集合である。

$(D - a)x = Dx - ax$  とする。このように関数に関数を対応させる写像を演算子 (operator) と呼ぶ。

$e^{at}$  は  $(D - a)x = 0$  の解である。実際、 $(D - a)e^{at} = 0$  である。さらに、

$$((D - a)e^{at})f(t) = D(e^{at})f(t) + e^{at}D(f(t)) - ae^{at}f(t) = (e^{at}D)f(t)$$

がすべての写像  $f(t)$  に対して成立するから、演算子として

$$(D - a)e^{at} = e^{at}D$$

となる。演算子の計算は行列の計算のように順序が重要である。右端から順に関数に作用するというように考える。

$(D - a)x = b(t)$  の解き方を次のように考える。

$$(D - a)(e^{at}e^{-at}x) = e^{at}D(e^{-at}x) = b(t)$$

$D^{-1}$  を不定積分を1つ取る写像とする。例えば、 $D^{-1}f(t) = \int_0^t f(s)ds$  としても

よい。実際は  $D^{-1}e^{at} = \frac{e^{at}}{a}$  と考える方が容易である。

そうすると、 $(D - a)(e^{at}e^{-at}x) = e^{at}D(e^{-at}x) = b(t)$  だから、

$$\begin{aligned} e^{-at}x &= D^{-1}(e^{-at}b(t)), \\ x &= e^{at}D^{-1}(e^{-at}b(t)) \end{aligned}$$

と計算される。

$$(D - a)^{-1} = e^{at}D^{-1}e^{-at}$$

と考えてよい。

$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = b(t)$  となる  $x$  を求める問題は、 $x$  に対して、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = D^2x + a_1Dx + a_2x$$

を対応させる写像の  $b(t)$  の逆像の点を1つ求めることである。

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$  のとき、

$$\begin{aligned} (D - \alpha_1)(D - \alpha_2)x &= (D - \alpha_1)(Dx - \alpha_2x) \\ &= D^2x - \alpha_2Dx - \alpha_1Dx + \alpha_1\alpha_2x \\ &= D^2x + a_1Dx + a_2x \end{aligned}$$

となる。

$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)x = b(t)$  の解は、

$$\begin{aligned}(D - \alpha_2)x &= (D - \alpha_1)^{-1}b(t) = e^{\alpha_1 t} D^{-1}(e^{-\alpha_1 t} b(t)), \\ x &= (D - \alpha_2)^{-1} e^{\alpha_1 t} D^{-1}(e^{-\alpha_1 t} b(t)) \\ &= e^{\alpha_2 t} D^{-1}(e^{-\alpha_2 t} e^{\alpha_1 t} D^{-1}(e^{-\alpha_1 t} b(t)))\end{aligned}$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \alpha)^2$  のとき、 $(D - \alpha)^2 x = b(t)$  の解は、

$$\begin{aligned}(D - \alpha)x &= (D - \alpha)^{-1}b(t) \\ &= e^{\alpha t} D^{-1}(e^{-\alpha t} b(t)), \\ x &= (D - \alpha)^{-1} e^{\alpha t} D^{-1}(e^{-\alpha t} b(t)) \\ &= e^{\alpha t} D^{-1}(e^{-\alpha t} e^{\alpha t} D^{-1}(e^{-\alpha t} b(t))) \\ &= e^{\alpha t} D^{-1}(D^{-1}(e^{-\alpha t} b(t)))\end{aligned}$$

これらの計算は、定数変化法を行っているのと同じであるが、計算の表記や見通しの上では簡明である。

とくに、 $b(t)$  が外部からの入力である場合、周期的な入力であることが多い。

周期  $2\pi$  のとき、フーリエ展開されている

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

と考える。それぞれの成分についての計算は、かなり機械的に出来ることが納得できるであろう。 $D^{-1}e^{at} = \frac{e^{at}}{a}$  と考えてよいことに注意する。

例。  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 2\cos t$  の解を 1 つ求めよ。

$D^2 + 2D + 2 = (D + 1 + i)(D + 1 - i)$  であるから、 $(D + 1 + i)(D + 1 - i)x = e^{it} + e^{-it}$  は次のように解かれる。

$$\begin{aligned}(D + 1 - i)x &= (D + 1 + i)^{-1}(e^{it} + e^{-it}) \\ &= e^{-(1+i)t} D^{-1} e^{(1+i)t} (e^{it} + e^{-it}) \\ &= e^{-(1+i)t} D^{-1} (e^{(1+2i)t} + e^t) \\ &= e^{-(1+i)t} \left( \frac{e^{(1+2i)t}}{1 + 2i} + e^t \right) \\ &= \left( \frac{e^{it}}{1 + 2i} + e^{-it} \right), \\ x &= (D + 1 - i)^{-1} \left( \frac{e^{it}}{1 + 2i} + e^{-it} \right) \\ &= e^{-(1-i)t} D^{-1} e^{(1-i)t} \left( \frac{e^{it}}{1 + 2i} + e^{-it} \right) \\ &= e^{-(1-i)t} D^{-1} \left( \frac{e^t}{1 + 2i} + e^{(1-2i)t} \right) \\ &= e^{-(1-i)t} \left( \frac{e^t}{1 + 2i} + \frac{e^{(1-2i)t}}{1 - 2i} \right) \\ &= \frac{e^{it}}{1 + 2i} + \frac{e^{-it}}{1 - 2i} \\ &= \frac{(1 - 2i)e^{it}}{5} + \frac{(1 + 2i)e^{-it}}{5} \\ &= \frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \sin t\end{aligned}$$

注意。この計算は、 $D^{-1}$  を定数を無視して取っているので計算が簡単になっている。 $D^{-1}$  を一通りに定めていないことに注意が必要である。

問．次の常微分方程式の実数値関数の解を1つ求めよ。

(ヒント： $(D - a)^{-1} = e^{at} D^{-1} e^{-at}$ )

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 16x = e^{-t}$$

$$(2) \frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 10x = 2 \cos 2t$$

解答例 (1)  $(D + 8)(D + 2)x = e^{-t}$

$$\begin{aligned} (D + 2)x &= (D + 8)^{-1} 1 = e^{-8t} D^{-1} e^{8t} e^{-t} = e^{-8t} D^{-1} e^{7t} \\ &= e^{-8t} \frac{e^{-7t}}{7} = \frac{e^{-t}}{7}, \\ x &= (D + 2)^{-1} \frac{e^{-t}}{7} = e^{-2t} D^{-1} e^{2t} \frac{e^{-t}}{7} \\ &= e^{-2t} D^{-1} \frac{e^t}{7} = e^{-2t} \frac{e^t}{7} = \frac{e^{-t}}{7} \end{aligned}$$

(2)  $(D + 3 + i)(D + 3 - i)x = e^{2it} + e^{-2it}$

$$\begin{aligned} (D + 3 - i)x &= (D + 3 + i)^{-1} (e^{2it} + e^{-2it}) = e^{-(3+i)t} D^{-1} e^{(3+i)t} (e^{2it} + e^{-2it}) \\ &= e^{-(3+i)t} D^{-1} (e^{(3+3i)t} + e^{(3-i)t}) = \frac{1}{3 + 3i} e^{2it} + \frac{1}{3 - i} e^{-2it}, \\ x &= (D + 3 - i)^{-1} \left( \frac{1}{3 + 3i} e^{2it} + \frac{1}{3 - i} e^{-2it} \right) \\ &= e^{-(3-i)t} D^{-1} e^{(3-i)t} \left( \frac{1}{3 + 3i} e^{2it} + \frac{1}{3 - i} e^{-2it} \right) \\ &= e^{-(3-i)t} D^{-1} \left( \frac{1}{3 + 3i} e^{(3+3i)t} + \frac{1}{3 - i} e^{(3-3i)t} \right) \\ &= \frac{1}{3 + i} \frac{1}{3 + 3i} e^{2it} + \frac{1}{3 - 3i} \frac{1}{3 - i} e^{-2it} \\ &= \frac{1}{6 + 12i} e^{2it} + \frac{1}{6 - 12i} e^{-2it} = \frac{1 - 2i}{30} e^{2it} + \frac{1 + 2i}{30} e^{-2it} \\ &= \frac{1}{30} (e^{2it} + e^{-2it}) + \frac{-2i}{30} (e^{2it} - e^{-2it}) = \frac{1}{30} (2 \cos 2t) + \frac{-2i}{30} (2i \sin 2t) \\ &= \frac{\cos 2t}{15} + \frac{2 \sin 2t}{15} \end{aligned}$$