４月２３日

3. 不変な多変数関数（ポテンシャル）が見つかる場合
（全微分方程式あるいは完全微分方程式）

3.1. ２変数関数の偏微分.

$f(x,y)$ について、x についての偏微分を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, y についての偏微分を $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ で表す。y が x の関数 $y(x)$ であれば、

$$\frac{\mathrm{d}f(x,y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$$

となる。

関係式 $f(x,y)=0$（あるいは、$f(x,y)=C$ (定数)）から微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

が得られる。この形になっていることがわかれば、微分方程式で与えられている関係式を、微分を含まない関係式に直すことができる。

x, y が t の関数 $x(t)$, $y(t)$ であるとき、

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$$

となる。

3.2. （第１）積分.

常微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b(x,y) \end{cases}$ に対して、もしも $\dfrac{\mathrm{d}f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = 0$ となる $f(x,y)$ がみつかれば、$f(x,y)$ は、常微分方程式の **（第１）積分**と呼ばれる。このとき、$f(x(t),y(t))$ は定数となる。$f(x,y) = C$ から、$y = h(x)$ のように解けることが期待できる。$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x,h(x))$ だから、変数分離型となる。（第１）積分を求める問題は、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b(x,y) = 0$$

となる $f(x,y)$ を求める問題である。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ \ \lambda(x,y)b(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\lambda(x,y)a(x,y) \end{cases}$$

となる $\lambda(x,y)$ を探すこととも同じである。これは、後に述べる積分因子を求める問題である。

例。 $H(x,y)$ に対し、$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = & -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}$ は第１積分 $H(x,y)$ を持つ。$H(x,y)$ は力学でハミルトニアンと呼ばれるものである。$H(x(t),y(t))$ が一定となることは、エネルギー保存則である。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = V(x)$ に対し、$V(x) = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$ とする。$y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とおくと、微分方程式は $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = & \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \end{cases}$ となる。これは、上の例で $H = \dfrac{1}{2}y^2 - U(x)$ としたものである。従って、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{1}{2}y^2 - U(x)) = y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - yV(x) = 0$ となり、$\dfrac{1}{2}y^2 - U(x) = C$ (一定)
ここからは、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{2(C+U(x))}$ という変数分離形の方程式を解くことになる。

3.3. 微分形式. $\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ の形の式を $f(x,y)$ の**全微分**とよぶ。一般に、$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ の形のものを１次微分形式または微分１形式とよぶ。与えられた微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、それが $\mathrm{d}f(x,y)$ の形のものかどうかを問う問題が考えられる。

これは、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y)$ をともに満たす f を求める問題である。

f が２回連続微分可能であれば、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ であるから、

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$

であることが必要である。これを**積分可能条件**と呼ぶ。積分可能条件を満たす微分１形式は**閉形式**と呼ばれる。全微分 $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ となっている微分１形式は**完全形式**と呼ばれる。

問題は、与えられた微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ が、積分可能条件を満たすとき（閉形式であるとき）、完全形式であるかということである。

平面全体で定義された連続微分可能関数 $g(x,y),\ h(x,y)$ については積分可能条件 $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ が、完全形式であるための十分条件であることが知られている。

実際、そのような $f(x,y)$ があれば、

$$f(x,y) - f(0,0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(xt,yt)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \{\frac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)x + \frac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)y\}\mathrm{d}t$$

を満たすから、積分可能条件を満たす微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、

$$f(x,y) = \int_0^1 \{g(tx,ty)x + h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t$$

とすればよい。

実際、

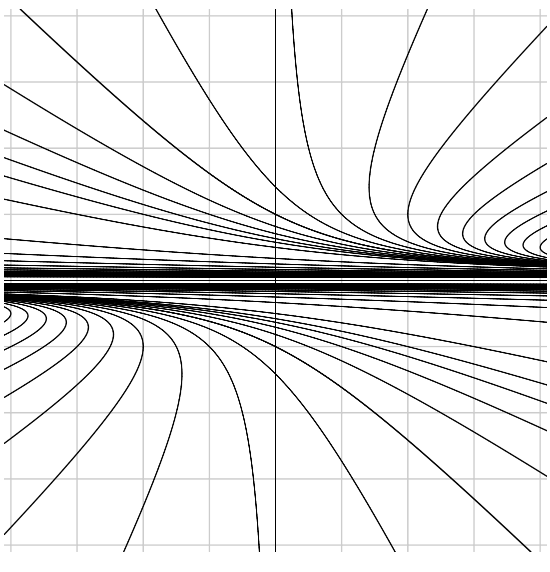
$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1 \{g(tx,ty)x+h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t \\
&=\int_0^1 \{g(tx,ty)+\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)tx+\frac{\partial h}{\partial x}(tx,ty)ty\}\mathrm{d}t \\
&=\Big[g(tx,ty)t\Big]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\{\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)x+\frac{\partial g}{\partial y}(tx,ty)y\}t\mathrm{d}t \\
&\qquad +\int_0^1\{\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)tx+\frac{\partial h}{\partial x}(tx,ty)ty\}\mathrm{d}t \\
&=g(x,y)
\end{aligned}
$$

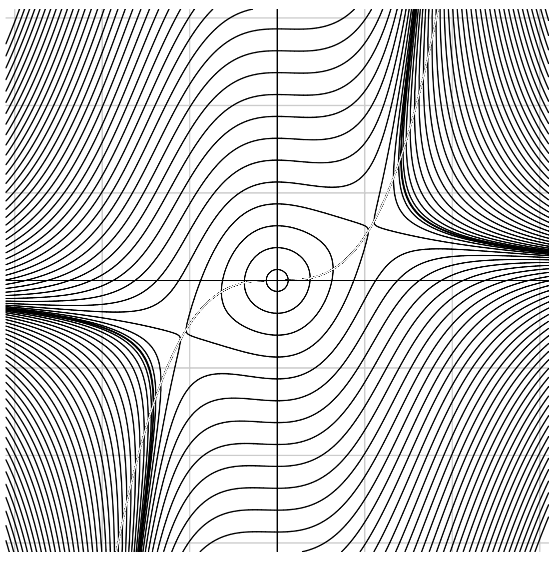
２つ目の等号の変形では、t についての関数 $g(tx,ty)$ を $g(tx,ty)t$ を用いて部分積分したものが、２つ目の等号に続く行である。３つ目の等号では、積分可能条件 $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ を用いている。

問（0）。 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1 \{g(tx,ty)x+h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t=h(x,y)$ を示せ。

問（1）。 微分形式 $y^2\mathrm{d}x+(2-xy)\mathrm{d}y$ は２変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

問（2）。 上記（１）の微分形式に $\frac{1}{y^3}$ をかけて得られる微分形式 $\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{2-xy}{y^3}\mathrm{d}y$ は２変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。下の左の図参照





3.4. **全微分方程式.**

微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、$g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y=0$ を**全微分方程式**と呼ぶ。その解とは、関数 $y(x)$ で、$g(x,y)+h(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ を満たすものである。平面全体で定義された微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ が、積分可能条件を満たせば、$\mathrm{d}f(x,y)=g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ となる関数 $f(x,y)$ が存在し、$f(x,y)=C$ (定数)（を解いたもの）が解を与える。

積分可能条件を満たしていることがわかる微分１形式と見て、常微分方程式が解ける場合がある。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x-3x^2y}{x^3-2y}$.

これを全微分方程式の形にすると $(-3x^2y+2x)\mathrm{d}x + (2y-x^3)\mathrm{d}y = 0$ で、これは平面全体で定義されている。積分可能条件 $\dfrac{\mathrm{d}(-3x^2y+2x)}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\mathrm{d}(2y-x^3)}{\mathrm{d}x}$ を満たすので、全微分 $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ の形に書かれる。

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_0^1 \{(-3x^2yt^3+2xt)x + (2yt-x^3t^3)y\}\mathrm{d}t \\
&= -3x^3y\frac{1}{4} + 2x^2\frac{1}{2} + 2y^2\frac{1}{2} - x^3y\frac{1}{4} \\
&= y^2 - x^3y + x^2
\end{aligned}
$$

従って、$y^2 - x^3y + x^2 = C$ すなわち、$y = \dfrac{1}{2}\{x^3 \pm \sqrt{x^6 - 4(x^2-C)}\}$ が解である。上の右の図参照。

3.5. 閉形式と完全形式.

積分可能条件を満たしていても、平面全体で定義されていない閉微分形式は、局所的には、完全形式であるが、定義域全体で完全形式となるとは限らない。

例えば、原点を除いた平面上で定義された微分１形式

$$
g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y
$$

を考えると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\Big) &= -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

となり、$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ を満たしている。

しかし、$\mathrm{d}f = g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y$ となる $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上で定義された関数 f は存在しない。理由は以下のとおりである。$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義する。もしも、f が存在していれば、

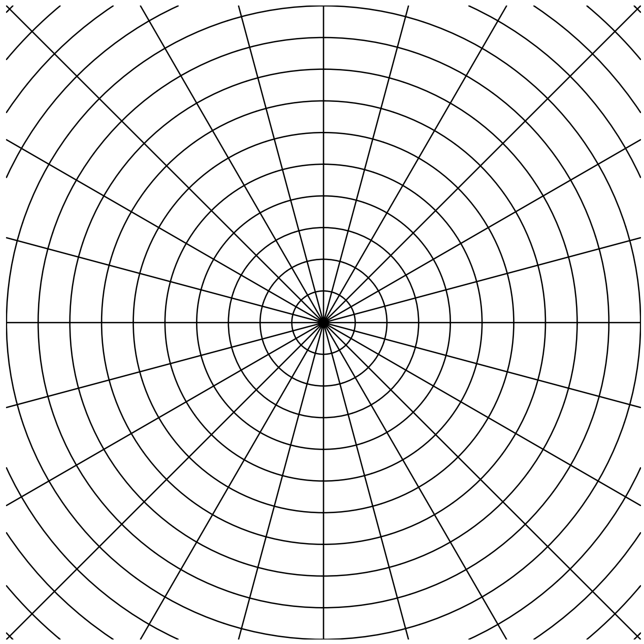
$$
\int_\gamma g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,0) - f(1,0) = 0
$$

となるはずである。しかし、

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \left((-\sin t)\frac{\mathrm{d}\cos t}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \cos t\frac{\mathrm{d}\sin t}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi
\end{aligned}
$$

となる。

この例では、y 軸を除けば、$F(x,y)=\tan^{-1}(\dfrac{y}{x})$ の全微分となっているし、x 軸を除けば、$F(x,y)=\dfrac{1}{\tan^{-1}(\dfrac{x}{y})}$ の全微分になっている。



3.6. **積分因子.**

積分可能条件を満たすとはかぎらない平面上の微分1形式 $g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ に対しても、もしもある平面上の関数 $\lambda(x,y)$ に対して、$\lambda(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)h(x,y)\mathrm{d}y$ が完全形式ならば、すなわち、積分可能条件 $\dfrac{\partial(\lambda(x,y)g(x,y))}{\partial y}=\dfrac{\partial(\lambda(x,y)h(x,y))}{\partial x}$ を満たせば、関数 $f(x,y)$ で $\mathrm{d}f(x,y)=\lambda(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)h(x,y)\mathrm{d}y$ を満たすものが得られ、$f(x,y)=C$ が解となる。

このような $\lambda(x,y)$ が存在すれば、それを**積分因子**と呼ぶ。積分因子を求める問題は難しい。

平面全体で定義された全微分方程式 $g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y=0$ は、常微分方程式 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-h(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\ \ g(x,y)\end{cases}$ に対応していると考えられる。$g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ の積分因子が存在すると、関数 $f(x,y)$ で $\mathrm{d}f(x,y)=\lambda(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)h(x,y)\mathrm{d}y$ を満たすものが得られるが、これが、常微分方程式 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-h(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\ \ g(x,y)\end{cases}$ の第1積分 $f(x,y)$ である。$(x(t),y(t))$ は、等位線 $f(x,y)=C$ 上を動く。等位線を持ち得ないような解曲線の形をしていれば、第1積分は存在しないし、$g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ の積分因子も存在しない。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{pmatrix}$ の解曲線。