数理科学 II（担当：坪井　俊）５月１４日の小テストの回答例

問題１． (1) 変数分離型常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (4x^3 - 2x)(y-1)(y+1)$ の一般解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \int (4x^3 - 2x)\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2}(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1})\mathrm{d}y$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(\log|y-1| - \log|y+1|) + 定数 = \frac{1}{2}\log|\frac{y-1}{y+1}| + 定数$

右辺は $\displaystyle\int (4x^3 - 2x)\mathrm{d}x = x^4 - x^2 + 定数$

従って $\displaystyle\frac{1}{2}\log|\frac{y-1}{y+1}| = x^4 - x^2 + C_1.$

$\displaystyle\frac{y-1}{y+1} = Ce^{2x^4 - 2x^2},\ y - 1 = Ce^{2x^4-2x^2}(y+1),\ y = \frac{1 + Ce^{2x^4-2x^2}}{1 - Ce^{2x^4-2x^2}}$

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)y\cos x$ の $y(0) = 1$ となる解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-2)y}\mathrm{d}y = \int \cos x\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-2)y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2}(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y})\mathrm{d}y$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(\log|y-2| - \log|y|) = \frac{1}{2}\log|\frac{y-2}{y}| + 定数$

右辺は $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + 定数$

従って $\displaystyle\log|\frac{y-2}{y}| = 2\sin x + C_1.$

$\displaystyle\frac{y-2}{y} = Ce^{2\sin x},\ y = \frac{2}{1 - Ce^{2\sin x}}$

ここで、$y(0) = 1$ だから $C = -1$ で、$\displaystyle y = \frac{2}{1 + e^{2\sin x}}$

(3) 微分形式 $(y^3 - 2xy)\mathrm{d}x + (4x^2 - 2xy^2)\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^3 - 2xy) = 3y^2 - 2x,\ \dfrac{\partial}{\partial x}(4x^2 - 2xy^2) = 8x - 2y^2$ は異なるので，2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ とならない。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^5}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{y^2-2x}{y^4}\mathrm{d}x+\dfrac{-2xy^2+4x^2}{y^5}\mathrm{d}y$ は $y\neq 0$ の範囲で 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y^2-2x}{y^4}=-2\dfrac{1}{y^3}+8\dfrac{x}{y^5}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{-2xy^2+4x^2}{y^5}=-2\dfrac{1}{y^3}+8\dfrac{x}{y^5}$ は等しいので，（$y\neq 0$ となる半平面は、その 2 点を結ぶ線分を常に含むから、）2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となる。
実際、$(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2x}{y^4})\mathrm{d}x+(\dfrac{-2x}{y^3}-\dfrac{-4x^2}{y^5})\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\dfrac{xy^2-x^2}{y^4})$ である。

(5) $t>0$ に対して定義された 1 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{x}{t}=t^3$ の $x(1)=1$ となる解を求めよ。

解答例 同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{x}{t}=0$ の解は、
$\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t$ から $\log|x|=2\log|t|+C_1$, $x=Ct^2$ である。
定数変化法を用いる。
$x(t)=C(t)t^2$ とすると、
$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}t^2=t^3$ を得る。
従って、$C=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int t\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}+C_2$
$x(t)=(\dfrac{t^2}{2}+C_2)t^2=\dfrac{1}{2}(t^4+2C_2t^2)$ について、
$x(1)=1$ だから $C_2=\dfrac{1}{2}$.
従って、$x(t)=\dfrac{1}{2}t^2(1+t^2)$

問題２． (1) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=3y_1\\[1ex]\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\ y_2\end{cases}$$
$$y_1(0)=1,\ y_2(0)=1$$

解答例 $y_1=C_1e^{3t}$, $y_2=C_2e^t$ が一般解だから、$y_1(0)=1$, $y_2(0)=1$ から、$C_1=1$, $C_2=1$ となり、$y_1=e^{3t}$, $y_2=e^t$ が解。ベクトルの形で書くと、$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}\\e^t\end{pmatrix}$ が解である。

(2) 次の常微分方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 5x_1 - 4x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - \ x_2 \end{cases}$$
$$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = 2$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおいて、y_1, y_2 についての常微分方程式を求めよ。それを用いて、もとの初期値問題を解け。

解答例 微分方程式は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ だから、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

従って、(1) から、$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ についての初期値問題の解となる。

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + e^{t} \\ e^{3t} + e^{t} \end{pmatrix}$ が求める解である。

問題３． $a_1(t), a_2(t), b(t), c(t)$ を実数値無限回微分可能関数とする。

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2(t)x = b(t)$ の解 $u(t)$,

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2(t)x = c(t)$ の解 $v(t)$,

実数 k, ℓ に対して、$w(t) = ku(t) + \ell v(t)$ は、

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2(t)x = kb(t) + \ell c(t)$ の解であることを示せ。

解答例

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a_2(t)w \\ &= \frac{\mathrm{d}^2(ku + \ell v)}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}(ku + \ell v)}{\mathrm{d}t} + a_2(t)(ku + \ell v) \\ &= (k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \ell\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}) + a_1(t)(k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \ell\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}) + a_2(t)(ku + \ell v) \\ &= k(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a_2(t)u) + \ell(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + a_2(t)v) = kb(t) + \ell c(t) \end{aligned}$$

これは、時間が余った人のための問題です。太陽の周りの惑星の軌道が 2 次曲線になることを示すものです。

G は万有引力定数、M, m を太陽と惑星の質量とし、太陽は原点で不動であるとする。惑星の座標 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ が、方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{GmM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を満たすとする。

(1) エネルギー $E = \dfrac{m}{2}\left((\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2\right) - \dfrac{GmM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{1}{2}}}$ は, $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすことを示せ。

解答例

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= m(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}) - GmM(-\frac{1}{2})(x(t)^2+y(t)^2)^{-\frac{3}{2}}(2x(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) \\ &= GmM(x(t)^2+y(t)^2)^{-\frac{3}{2}}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}x(t) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}y(t)) \\ &\quad + GmM(x(t)^2+y(t)^2)^{-\frac{3}{2}}(x(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) = 0\end{aligned}$$

(2) 面積速度 $\Omega = \dfrac{1}{2}\left(x(t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ は、$\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすことを示せ。

解答例

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x(t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y(t)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x(t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - y(t)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-x(t)\frac{GM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}}y(t) + y(t)\frac{GM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}}x(t)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

(3) 極座標 (r, θ) で、微分方程式を表すために、$x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ とおいて、エネルギー E, 面積速度 Ω を、$r(t)$, $\theta(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ で表せ。

解答例 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ だから、

$$E = \frac{m}{2}\left((\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2\right) - \frac{GmM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m}{2}\left((\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2 + r(t)^2(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2\right) - \frac{GmM}{r(t)}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}\left(x(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\Big(r(t)\cos\theta(t)(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}) \\ &\quad - r(t)\sin\theta(t)(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})\Big) = \frac{1}{2}r(t)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

(4) r は θ の関数であると仮定して、$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて、$r(\theta)$ と $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ の関係式を（定数（第一積分）E, Ω を使って）求めよ（変数分離型の常微分方程式となる）。

解答例 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\Omega}{r^2}$ を $\dfrac{E}{m}$ の式に代入すると次のようになる。

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}r(t)^2\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}r^2\Big(\frac{2\Omega}{r^2}\Big)^2 - \frac{GM}{r}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{2\Omega}{r^2}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 + \frac{2\Omega^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = \frac{2\Omega^2}{r^4}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 + \frac{2\Omega^2}{r^2} - \frac{GM}{r}$$

従って、$\dfrac{1}{r^4}\Big(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 = -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{GM}{2\Omega^2}\dfrac{1}{r} + \dfrac{E}{2m\Omega^2}$ を得る。

(5) (4) で求めた常微分方程式を、$\dfrac{E}{2m\Omega^2} = \dfrac{e^2-1}{e^2a^2}$, $\dfrac{GM}{2\Omega^2} = \dfrac{2}{ea}$ とおいて変形し、$w(\theta) = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{ea}$ についての微分方程式を求めよ。これを用いて、$r(\theta)$ を求めよ。

解答例 $\dfrac{1}{r^4}\Big(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 = -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2}{ea}\dfrac{1}{r} + \dfrac{e^2-1}{e^2a^2} = -\Big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{ea}\Big)^2 + \dfrac{1}{a^2}$

従って、$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm r^2\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \Big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{ea}\Big)^2}$ である。

w の微分方程式として、$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \Big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{ea}\Big)^2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - w^2}$ を得る。

この変数分離型の微分方程式は、解が求まる。$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - w^2}} = \pm\int \mathrm{d}\theta = \pm\theta + 定数$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - w^2}}$ は、$w = \dfrac{\cos z}{a}$ と置くと、

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - w^2}} = \int \frac{\frac{-\sin z\mathrm{d}z}{a}}{\sqrt{\frac{(\sin z)^2}{a^2}}} = \pm\int \mathrm{d}z = \pm z + 定数$$ となる。

従って、$\theta = \pm z + 定数$ となり、解 $w(\theta)$ は、$w(\theta) = \dfrac{\cos(\pm\theta + \theta_0)}{a} = \dfrac{\cos(\theta \pm \theta_0)}{a}$ となる。$\pm\theta_0$ を $-\theta_0$ に取り直して、

$\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{ea} = \dfrac{\cos(\theta - \theta_0)}{a}$ を得る。従って、$r = \dfrac{ea}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ を得る。

(6) (5) がうまく計算できない人は、2 次曲線の極方程式 $r = \dfrac{ea}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ は、定数 a, e を（E, Ω から）うまく定めれば、(4) で求めた方程式の解であることを示せ。（常微分方程式の解の存在と一意性の定理から、初期値 $\theta = \theta_0$ のときに r が最小値であるような解は、この極方程式を満たすことがわかる。）

解答例 省略。