数理科学II（担当：坪井　俊）小テスト　　５月１４日

問題１． (1) 変数分離型常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (4x^3 - 2x)(y-1)(y+1)$ の一般解を求めよ。

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)y\cos x$ の $y(0) = 1$ となる解を求めよ。

(3) 微分形式 $(y^3 - 2xy)\mathrm{d}x + (4x^2 - 2xy^2)\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x, y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^5}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{y^2 - 2x}{y^4}\mathrm{d}x + \dfrac{-2xy^2 + 4x^2}{y^5}\mathrm{d}y$ は $y \neq 0$ の範囲で 2 変数関数 $f(x, y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

(5) $t > 0$ に対して定義された 1 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2\dfrac{x}{t} = t^3$ の $x(1) = 1$ となる解を求めよ。

問題２． (1) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 3y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \ y_2 \end{cases}$$
$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1$$

(2) 次の常微分方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 5x_1 - 4x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - \ x_2 \end{cases}$$
$$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = 2$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおいて、y_1, y_2 についての常微分方程式を求めよ。それを用いて、もとの初期値問題を解け。

問題３． $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$, $c(t)$ を実数値無限回微分可能関数とする。

2 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2(t)x = b(t)$ の解 $u(t)$,

2 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2(t)x = c(t)$ の解 $v(t)$,

実数 k, ℓ に対して、$w(t) = ku(t) + \ell v(t)$ は、

2 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2(t)x = kb(t) + \ell c(t)$ の解であることを示せ。

これは、時間が余った人のための問題です。太陽の周りの惑星の軌道が 2 次曲線になることを示すものです。

G は万有引力定数、M, m を太陽と惑星の質量とし、太陽は原点で不動であるとする。惑星の座標 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ が、方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{GmM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を満たすとする。

(1) エネルギー $E = \dfrac{m}{2}\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right) - \dfrac{GmM}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{1}{2}}}$ は, $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすことを示せ。

(2) 面積速度 $\Omega = \dfrac{1}{2}\left(x(t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ は、$\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすことを示せ。

(3) 極座標 (r, θ) で、微分方程式を表すために、$x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ とおいて、エネルギー E, 面積速度 Ω を、$r(t)$, $\theta(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ で表せ。

(4) r は θ の関数であると仮定して、$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて、$r(\theta)$ と $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ の関係式を（定数（第一積分）E, Ω を使って）求めよ（変数分離型の常微分方程式となる）。

(5) (4) で求めた常微分方程式を、$\dfrac{E}{2m\Omega^2} = \dfrac{e^2-1}{e^2a^2}$, $\dfrac{GM}{2\Omega^2} = \dfrac{2}{ea}$ とおいて変形し、$w(\theta) = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{ea}$ についての微分方程式を求めよ。これを用いて、$r(\theta)$ を求めよ。

(6) (5) がうまく計算できない人は、2 次曲線の極方程式 $r = \dfrac{ea}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ は、定数 a, e を（E, Ω から）うまく定めれば、(4) で求めた方程式の解であることを示せ。（常微分方程式の解の存在と一意性の定理から、初期値 $\theta = \theta_0$ のときに r が最小値であるような解は、この極方程式を満たすことがわかる。）