8. 高階線形常微分方程式

8.1. 高階線形常微分方程式の初期値問題.

$\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = b(t)$ の形の常微分方程式を考える。このように最高階の微分について解かれているものを正規形と呼んだ。$b(t) = 0$ のとき、同次方程式であるという。2階ならば、$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = b(t)$ である。

$y_1 = x, y_2 = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \ldots, y_n = \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}$ と置いて、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

2階ならば、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ である。

ある時刻 t の状態を指定するためには $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$ を定めなければならない。この $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$ の空間を相空間、状態空間などと呼ぶ。(他のわかっている条件により、さらに制限が加わっていることもある。)

初期値問題を解くためには、$\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t_0) \\ y_n(t_0) \end{pmatrix}$ すなわち、$\begin{pmatrix} x(0) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0) \end{pmatrix}$ を指定する必要がある。

このような線形常微分方程式を解くためには、まず同次方程式を解くのであった。

8.2. **高階線形同次常微分方程式.** 高階線形同次常微分方程式を１階化したものを解くためには、行列
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ の固有値、ジョルダン標準形を知る必要があった。

２階ならば、$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 & \lambda + a_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ である。一般に次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \lambda & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&= a_0 + \lambda(a_1 + \lambda(\cdots(a_n + 2 + \lambda(\lambda + a_{n-1}))\cdots)) \\
&= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0
\end{aligned}
$$

従って、固有方程式は、与えられた高階微分方程式の $\dfrac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}$ を λ^k で置き換えたものである。

さらに、ジョルダン標準形については次のことがわかる。固有方程式が、$(\lambda-\alpha)^k$ で割り切れ、$(\lambda-\alpha)^{k+1}$ で割り切れないときにはジョルダン標準形は、k 次の固有値 α のジョルダンブロックを含む。

理由は、固有値 α の固有ベクトルの空間の次元が１であることである。実際、固有値 α の固有ベクトルの空間は、$\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \alpha + a_{n-1} \end{pmatrix} \vec{v} = 0$ を満たす $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}$ の集合であるが、$v_2 = \alpha v_1,\ v_3 = \alpha v_2,\ v_n = \alpha v_{n-1}$ を満たすから、この空間の次元は１である。もしも、固有値 α に対するジョルダンブロックの個数が２個以上ならば、それぞれに対して、固有ベクトルの空間が１次元ずつあるから、固有ベクトルの空間は２次元以上となる。

こうして、$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha_1)^{k_1}\ldots(\lambda-\alpha_\ell)^{k_\ell}$ を $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_\ell$ が相異なる因数分解とすると、同次方程式の解 $\vec{y}(t)$ の成分は次の関数の線形結合（１次結合）で書かれる。

$$\begin{gathered} e^{\alpha_1 t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots, t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t}, \\ \ldots \\ e^{\alpha_\ell t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots, t^{k_\ell-1}e^{\alpha_\ell t} \end{gathered}$$

高階線形同次常微分方程式の解については、$x(t)=y_1(t)$ だから、$x(t)$ も上の関数の一次結合で書かれる。

すなわち、

定理。 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha_1)^{k_1}\ldots(\lambda-\alpha_\ell)^{k_\ell}$ を $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_\ell$ が相異なる因数分解とすると、同次線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+ +a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の一般解は、次の関数の線形結合（１次結合）である。

$$e^{\alpha_1 t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots, t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t},\quad \ldots,\quad e^{\alpha_\ell t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots, t^{k_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}$$

この事実を次のように言い表す。

同次線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots++a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の解は、

$$e^{\alpha_1 t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots, t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t},\quad \ldots,\quad e^{\alpha_\ell t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots, t^{k_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}$$

を基底とする n 次元ベクトル空間をなす。

多項式 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, n 次方程式 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ を $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots++a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の特性多項式、特性方程式と呼ぶ。

２階同次線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の一般解は以下のようになる。

- $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$ ($\alpha_1,\ \alpha_2$ は実数で $\alpha_1\neq\alpha_2$) のとき、$C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}$
- $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\mu-\nu i)(\lambda-\mu+\nu i)$ ($\mu,\ \nu\neq 0$ は実数) のとき、$C_1e^{\mu t}\cos\nu t+C_2e^{\mu t}\sin\nu t$
- $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha)^2$ のとき、$C_1e^{\alpha t}+C_2te^{\alpha t}$

例。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=0$ の特性多項式は $\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)$ だから一般解は、$C_1e^{-3t}+C_2e^t$ である。

初期値 $x(0)=3,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-1$ となる解は、$\begin{cases} C_1+C_2=3 \\ -3C_1+C_2=-1 \end{cases}$ を解いて、$C_1=1$, $C_2=1$ だから、$x(t)=e^{-3t}+e^t$ である。

（２） $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0$ の特性多項式は $\lambda^2+2\lambda+2=(\lambda+1+i)(\lambda+1-i)$ だから一般解は、$C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t$ である。

初期値 $x(0)=3,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-1$ となる解は、$\begin{cases} C_1=3 \\ -C_1+C_2=-1 \end{cases}$ を解いて、$C_1=3$, $C_2=2$ だから、$x(t)=3e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t=e^{-t}(3\cos t+2\sin t)$ である。

（３） $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$ の特性多項式は $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$ だから一般解は、$C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$ である。

初期値 $x(0)=3,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-1$ となる解は、$\begin{cases} C_1=3 \\ -C_1+C_2=-1 \end{cases}$ を解いて、$C_1=3$, $C_2=2$ だから、$x(t)=3e^{-t}+2te^{-t}$ である。

問． 次の常微分方程式の実数値関数の一般解を与えよ。
（１） $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+8\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+12x=0$
（２） $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+8\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+16x=0$
（３） $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+8\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+20x=0$

解答例。 （１）特性多項式が $\lambda^2+8\lambda+12=(\lambda+2)(\lambda+6)$ だから、一般解は $a_1e^{-6t}+a_2e^{-2t}$.
（２）特性多項式が $\lambda^2+8\lambda+16=(\lambda+4)^2$ だから、一般解は $a_1e^{-4t}+a_2te^{-4t}$.
（３）特性多項式が $\lambda^2+8\lambda+20=(\lambda+4+2i)(\lambda+4-2i)$ だから、一般解は $e^{-4t}(a_1\cos 2t+a_2\sin 2t)$.

8.3. **非同次方程式.** 非同次方程式の解に、同次方程式の解を加えたものは再び非同次方程式の解である。

非同次方程式の一般解を求めるためには、その解を１つ求めればよい。

線形非同次方程式の一般論に従って求めてみると以下のようになる。

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=b(t)$ の解は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ の解を求めることで得られる。

$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$, $(\alpha_1\neq\alpha_2)$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$\exp(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix})=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

非同次方程式の解を、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\exp(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ の形で求めるためには、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\exp(-t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ を積分すれば良く、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}&=\int_0^t\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-t\alpha_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix} -b(t)e^{-t\alpha_1} \\ b(t)e^{-t\alpha_2} \end{pmatrix}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha_2} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -b(t)e^{-t\alpha_1} \\ b(t)e^{-t\alpha_2} \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & e^{t\alpha_2} \\ \alpha_1 e^{t\alpha_1} & \alpha_2 e^{t\alpha_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix} -e^{t\alpha_1}\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t + e^{t\alpha_2}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t \\ -\alpha_1 e^{t\alpha_1}\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t + \alpha_2 e^{t\alpha_2}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

この計算から、２階非同次方程式の $x(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0$ を満たす解は、

$$x(t) = -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t$$

となる。

この計算は、積分によって、非同次方程式の解の１つを計算できることを示すために書いたもので、公式を与えようとしたものではない。

定数変化法だから、$x(t)=C_1(t)e^{\alpha_1 t}$ の形で求めることにして計算をしても２階位なら解は得られる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0x(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}t^2}e^{\alpha_1 t} + 2\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + C_1\alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + a_1\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}e^{\alpha_1 t} + a_1C_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + a_0C_1e^{\alpha_1 t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}t^2}e^{\alpha_1 t} + 2\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + a_1\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}e^{\alpha_1 t} = b(t)
\end{aligned}$$

だから、$E_1 = \dfrac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}$ について、１階線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}t} + (2\alpha_1 + a_1)E_1 = b(t)e^{-\alpha_1 t}$$

を再び解くことになる。$E_1(t) = F_1(t)e^{-(2\alpha_1+a_1)t}$ の形で求めると、

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t} = b(t)e^{-\alpha_1 t}e^{(2\alpha_1+a_1)t} = b(t)e^{(\alpha_1+a_1)t}$$

従って、

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= \int_0^t b(t)e^{(\alpha_1+a_1)t}\mathrm{d}t, \\
E_1(t) &= e^{-(2\alpha_1+a_1)t}\int_0^t b(t)e^{(\alpha_1+a_1)t}\mathrm{d}t, \\
C_1(t) &= \int_0^t e^{-(2\alpha_1+a_1)t}\int_0^t b(s)e^{(\alpha_1+a_1)s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \\
x(t) &= e^{\alpha_1 t}\int_0^t e^{-(2\alpha_1+a_1)t}\int_0^t b(s)e^{(\alpha_1+a_1)s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$a_1 = -\alpha_1 - \alpha_2$ であり、部分積分すると、前の解と一致することも確かめられる。

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha_1 t} \int_0^t e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} \int_0^t b(s) e^{-\alpha_2 s} \mathrm{d}s \mathrm{d}t \\ &= e^{\alpha_1 t} \left[\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} \int_0^t b(s) e^{-\alpha_2 s} \mathrm{d}s \right]_0^t \\ &\quad - e^{\alpha_1 t} \int_0^t \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} b(t) e^{-\alpha_2 t} \mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_0^t b(t) e^{-t\alpha_1} \mathrm{d}t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_0^t b(t) e^{-t\alpha_2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = (\lambda - \alpha)^2$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

だから、

$$\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} 0 \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

非同次方程式の解を、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ の形で求めるためには、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \exp(-t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ を積分すれば良く、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t\alpha} & -te^{-t\alpha} \\ 0 & e^{-t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -b(t)te^{-t\alpha} \\ b(t)e^{-t\alpha} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -b(t)te^{-t\alpha} \\ b(t)e^{-t\alpha} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} \\ \alpha e^{t\alpha} & \alpha te^{t\alpha} + e^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\int_0^t b(t)te^{-t\alpha} \mathrm{d}t \\ \int_0^t b(t)e^{-t\alpha} \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{t\alpha} \int_0^t b(t)te^{-t\alpha} \mathrm{d}t + te^{t\alpha} \int_0^t b(t)e^{-t\alpha} \mathrm{d}t \\ -\alpha e^{t\alpha} \int_0^t b(t)te^{-t\alpha} \mathrm{d}t + (\alpha te^{t\alpha} + e^{t\alpha}) \int_0^t b(t)e^{-t\alpha} \mathrm{d}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この計算から、２階非同次方程式の $x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ を満たす解は、

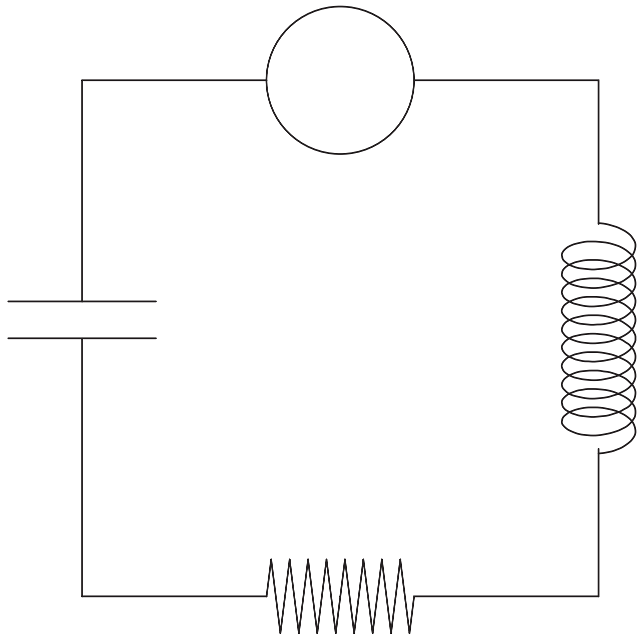
$$x(t) = -e^{t\alpha} \int_0^t b(t)te^{-t\alpha} \mathrm{d}t + te^{t\alpha} \int_0^t b(t)e^{-t\alpha} \mathrm{d}t$$

となる。

これらの計算からわかることは、$b(t)$ が指数関数や多項式の時には具体的な計算が比較的容易に出来るということである。

もう１つの問題は、非同次方程式の１つの解を求めることの意味である。現実の問題では、しばしば同次方程式の解自体の寄与が無視でき、同次方程式の解の影響が限定的に現れることが観察される。

8.4. 古典的電気回路.



キャパシター（capacitor コンデンサー）、コイル (inductor)、回路の抵抗 (resistor)、からなる電気回路を考える。

- 抵抗は、$E = RI$ を満たす。R は抵抗 (レジスタンス) と呼ばれる。
- 電流 I に対して、キャパシターは、両端の電位差 E が, 電荷 (チャージ)Q に比例し、$Q = CE$, $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ を満たす。従って、$I = C\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ を満たす。C はキャパシタンスと呼ばれる。
- 電流 I に対して、コイルは、両端の電位差 E が, $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = E$ を満たす。L はインダクタンスと呼ばれる。

円の部分には外部電圧 $E_0 \cos\omega t$ を交流でかける予定である。

キルヒホッフの法則（電流は同じ量であることを参考にして）流れる電流 I は、キャパシター（コンデンサー）、コイル、回路の抵抗について等しい。

円の両端の電位差 E は $E = E_C + E_R + E_L$ である。これについて、

$C\dfrac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = I$, $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = E_L$, $E_R = RI$

回路には時計回りに向きが付いているとして

$$E = E_C + E_R + E_L = E_C + RC\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2E_C}{\mathrm{d}t^2}$$

交流の電位を与えると、$x = E_c$ の微分方程式として、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}x = \frac{E_0}{LC}\cos\omega t$$

を得る。

特性方程式は、$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$. 特性解（特性方程式の解）は

$$\frac{1}{2}(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}) = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

特性解（特性方程式の解）は、固有値は２つの負の実数 α_1, α_2 であるか、固有値が１つの負の実数 α となるか、実部が負の共役複素数 $\mu \pm \nu i$ である。

従って、同次方程式の解 $x(t)$ は、$a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}$, または、$a_1 e^{\alpha t} + a_2 t e^{\alpha t}$, または、$e^{\mu t}(a_1 \cos \nu t + a_2 \sin \nu t)$ の形となる。

従って $t \longrightarrow \infty$ のとき、急速に $x(t) \longrightarrow 0$ となる。

非同次方程式の解を１つ見つけると、すべての解はこの解に近づく。

以前に求めた式で考えると、非同次方程式の解の１つは、２つの特性解をもつときは、次で求められる。

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2LC}\int_0^t (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2LC}\int_0^t (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2LC}\left[\frac{e^{t(i\omega - \alpha_1)}}{i\omega - \alpha_1} + \frac{e^{t(-i\omega - \alpha_1)}}{-i\omega - \alpha_1}\right]_0^t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2LC}\left[\frac{e^{t(i\omega - \alpha_2)}}{i\omega - \alpha_2} + \frac{e^{t(-i\omega - \alpha_2)}}{-i\omega - \alpha_2}\right]_0^t \end{aligned}$$

この式の 0 での値に関係する部分は、同次方程式の解だから、非同次方程式の解の１つは、２つの特性解をもつときは、

$$\begin{aligned} &\frac{E_0}{2LC(\alpha_2 - \alpha_1)}\{-\frac{e^{ti\omega}}{i\omega - \alpha_1} - \frac{e^{-ti\omega}}{-i\omega - \alpha_1} + \frac{e^{ti\omega}}{i\omega - \alpha_2} + \frac{e^{-ti\omega}}{-i\omega - \alpha_2}\} \\ &= \frac{E_0}{2LC(\alpha_2 - \alpha_1)}\{(-\frac{1}{i\omega - \alpha_1} + \frac{1}{i\omega - \alpha_2})e^{ti\omega} + (-\frac{1}{-i\omega - \alpha_1} + \frac{1}{-i\omega - \alpha_2})e^{-ti\omega}\} \\ &= \frac{E_0}{2LC(\alpha_2 - \alpha_1)}\{\frac{-i\omega + \alpha_2 + i\omega - \alpha_1}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)}e^{ti\omega} + \frac{i\omega + \alpha_2 - i\omega - \alpha_1}{(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2)}e^{-ti\omega}\} \\ &= \frac{E_0}{2LC}\{\frac{e^{ti\omega}}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)} + \frac{e^{-ti\omega}}{(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2)}\} \\ &= \frac{E_0}{2LC}\{\frac{e^{ti\omega}}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} + \frac{e^{-ti\omega}}{-\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}}\} \end{aligned}$$

電流を求めると、

$$\begin{aligned} I = C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{E_0}{2L}\{\frac{i\omega e^{ti\omega}}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} + \frac{-i\omega e^{-ti\omega}}{-\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}}\} \\ &= \frac{C\omega E_0}{2}\{\frac{ie^{ti\omega}}{-LC\omega^2 + iRC\omega + 1} + \frac{-ie^{-ti\omega}}{-LC\omega^2 - iRC\omega + 1}\} \\ &= \frac{C\omega E_0}{2}\{\frac{(RC\omega - (LC\omega^2 - 1)i)e^{ti\omega}}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2} + \frac{(RC\omega + (LC\omega^2 - 1)i)e^{-ti\omega}}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2}\} \end{aligned}$$

振幅は $\frac{C\omega E_0}{\sqrt{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2}}$、位相のずれ ϕ について、$\tan\phi = -\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}$.

抵抗がゼロ $(R = 0)$ ならば、同次方程式の解は、$\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$ の線形結合になる。ここで $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ である。$(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2 = L^2C^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2C^2\omega^2$

となるから、振幅は $\dfrac{\dfrac{E_0}{L}}{\sqrt{\dfrac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2}+\dfrac{R^2}{L^2}}}$. ω が ω_0 に近づくときには、電流の振幅は最大値 $\dfrac{E_0}{R}$ に近づく。

このような場合、重要なことは、非同次方程式の解をひとつ求めることであることになる。

8.5. **演算子法または記号法.**

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を D と書くと、D は微分可能な関数に対してその導関数を対応させる写像である。

$$D : C^\infty \longrightarrow C^\infty$$

ここで、C^∞ は無限回微分できる関数の集合である。

$(D-a)x = Dx - ax$ とする。このように関数に関数を対応させる写像を演算子 (operator) と呼ぶ。

e^{at} は $(D-a)x=0$ の解である。実際、$(D-a)e^{at}=0$ である。さらに、

$$((D-a)e^{at})f(t) = D(e^{at})f(t) + e^{at}D(f(t)) - ae^{at}f(t) = (e^{at}D)f(t)$$

がすべての写像 $f(t)$ に対して成立するから、演算子として

$$(D-a)e^{at} = e^{at}D$$

となる。演算子の計算は行列の計算のように順序が重要である。右端から順に関数に作用するというように考える。

$(D-a)x=b(t)$ の解き方を次のように考える。

$$(D-a)(e^{at}e^{-at}x) = e^{at}D(e^{-at}x) = b(t)$$

D^{-1} を不定積分を1つ取る写像とする。例えば、$D^{-1}f(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ としてもよい。実際は $D^{-1}e^{at} = \dfrac{e^{at}}{a}$ と考える方が容易である。

そうすると、$(D-a)(e^{at}e^{-at}x) = e^{at}D(e^{-at}x) = b(t)$ だから、

$$\begin{aligned} e^{-at}x &= D^{-1}(e^{-at}b(t)), \\ x &= e^{at}D^{-1}(e^{-at}b(t)) \end{aligned}$$

と計算される。

$$(D-a)^{-1} = e^{at}D^{-1}e^{-at}$$

と考えてよい。

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t)$ となる x を求める問題は、x に対して、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = D^2x + a_1Dx + a_2x$$

を対応させる写像の $b(t)$ の逆像の点を1つ求めることである。

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$ のとき、

$$\begin{aligned} (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)x &= (D-\alpha_1)(Dx-\alpha_2x) \\ &= D^2x - \alpha_2Dx - \alpha_1Dx + \alpha_1\alpha_2x \\ &= D^2x + a_1Dx + a_2x \end{aligned}$$

となる。

$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)x = b(t)$ の解は、

$$\begin{aligned}(D-\alpha_2)x &= (D-\alpha_1)^{-1}b(t) = e^{\alpha_1 t}D^{-1}(e^{-\alpha_1 t}b(t)),\\ x &= (D-\alpha_2)^{-1}e^{\alpha_1 t}D^{-1}(e^{-\alpha_1 t}b(t))\\ &= e^{\alpha_2 t}D^{-1}(e^{-\alpha_2 t}e^{\alpha_1 t}D^{-1}(e^{-\alpha_1 t}b(t)))\end{aligned}$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda-\alpha)^2$ のとき、$(D-\alpha)^2 x = b(t)$ の解は、

$$\begin{aligned}(D-\alpha)x &= (D-\alpha)^{-1}b(t)\\ &= e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t)),\\ x &= (D-\alpha)^{-1}e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t))\\ &= e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t)))\\ &= e^{\alpha t}D^{-1}(D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t)))\end{aligned}$$

これらの計算は、定数変化法を行っているのと同じであるが、計算の表記や見通しの上では簡明である。

とくに、$b(t)$ が外部からの入力である場合、周期的な入力であることが多い。

周期 2π のとき、フーリエ展開されている

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

と考える。それぞれの成分についての計算は、かなり機械的に出来ることが納得できるであろう。$D^{-1}e^{at} = \dfrac{e^{at}}{a}$ と考えてよいことに注意する。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 2\cos t$ の解を１つ求めよ。

$D^2+2D+2 = (D+1+i)(D+1-i)$ であるから、$(D+1+i)(D+1-i)x = e^{it}+e^{-it}$ は次のように解かれる。

$$\begin{aligned}(D+1-i)x &= (D+1+i)^{-1}(e^{it}+e^{-it})\\ &= e^{-(1+i)t}D^{-1}e^{(1+i)t}(e^{it}+e^{-it})\\ &= e^{-(1+i)t}D^{-1}(e^{(1+2i)t}+e^{t})\\ &= e^{-(1+i)t}(\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}+e^{t})\\ &= (\frac{e^{it}}{1+2i}+e^{-it}),\\ x &= (D+1-i)^{-1}(\frac{e^{it}}{1+2i}+e^{-it})\\ &= e^{-(1-i)t}D^{-1}e^{(1-i)t}(\frac{e^{it}}{1+2i}+e^{-it})\\ &= e^{-(1-i)t}D^{-1}(\frac{e^{t}}{1+2i}+e^{(1-2i)t})\\ &= e^{-(1-i)t}(\frac{e^{t}}{1+2i}+\frac{e^{(1-2i)t}}{1-2i})\\ &= \frac{e^{it}}{1+2i}+\frac{e^{-it}}{1-2i}\\ &= \frac{(1-2i)e^{it}}{5}+\frac{(1+2i)e^{-it}}{5}\\ &= \frac{2}{5}\cos t+\frac{4}{5}\sin t\end{aligned}$$

注意。この計算は、D^{-1} を定数を無視して取っているので計算が簡単になっている。D^{-1} を一通りに定めていないことに注意が必要である。

問. 次の常微分方程式の実数値関数の解を１つ求めよ。
（ヒント：$(D-a)^{-1} = e^{at}D^{-1}e^{-at}$）

（１）$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 10\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 16x = e^{-t}$

（２）$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 6\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 10x = 2\cos 2t$

解答例（１）$(D+8)(D+2)x = e^{-t}$

$$\begin{aligned}(D+2)x &= (D+8)^{-1}1 = e^{-8t}D^{-1}e^{8t}e^{-t} = e^{-8t}D^{-1}e^{7t}\\ &= e^{-8t}\frac{e^{-7t}}{7} = \frac{e^{-t}}{7},\\ x &= (D+2)^{-1}\frac{e^{-t}}{7} = e^{-2t}D^{-1}e^{2t}\frac{e^{-t}}{7}\\ &= e^{-2t}D^{-1}\tfrac{e^t}{7} = e^{-2t}\frac{e^t}{7} = \frac{e^{-t}}{7}\end{aligned}$$

（２）$(D+3+i)(D+3-i)x = e^{2it} + e^{-2it}$

$$\begin{aligned}(D+3-i)x &= (D+3+i)^{-1}(e^{2it}+e^{-2it}) = e^{-(3+i)t}D^{-1}e^{(3+i)t}(e^{2it}+e^{-2it})\\ &= e^{-(3+i)t}D^{-1}(e^{(3+3i)t}+e^{(3-i)t}) = \frac{1}{3+3i}e^{2it} + \frac{1}{3-i}e^{-2it},\\ x &= (D+3-i)^{-1}(\frac{1}{3+3i}e^{2it} + \frac{1}{3-i}e^{-2it})\\ &= e^{-(3-i)t}D^{-1}e^{(3-i)t}(\frac{1}{3+3i}e^{2it} + \frac{1}{3-i}e^{-2it})\\ &= e^{-(3-i)t}D^{-1}(\frac{1}{3+3i}e^{(3+3i)t} + \frac{1}{3-i}e^{(3-3i)t})\\ &= \frac{1}{3+i}\frac{1}{3+3i}e^{2it} + \frac{1}{3-3i}\frac{1}{3-i}e^{-2it}\\ &= \frac{1}{6+12i}e^{2it} + \frac{1}{6-12i}e^{-2it} = \frac{1-2i}{30}e^{2it} + \frac{1+2i}{30}e^{-2it}\\ &= \frac{1}{30}(e^{2it}+e^{-2it}) + \frac{-2i}{30}(e^{2it}-e^{-2it}) = \frac{1}{30}(2\cos 2t) + \frac{-2i}{30}(2i\sin 2t)\\ &= \frac{\cos 2t}{15} + \frac{2\sin 2t}{15}\end{aligned}$$