2. 不定積分を使って解ける常微分方程式

2.1. 合成関数の微分. x を変数とする関数 $f(x)$ について、x が変数 t の関数 $x(t)$ となっていると、$\dfrac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t))\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f'(x(t))x'(t)$ となる。

逆に、置換積分 $f(x(b)) - f(x(a)) = \displaystyle\int_{x(a)}^{x(b)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ となる。

2.2. 関係式の微分. もともと、$F(x) = G(y)$ という関係式が与えられていると、$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$ という微分の関係（微分方程式）が得られる。このような形の微分の関係式は不定積分で x, y の関係式に戻すことができる。また、変数をうまく置き換えてこのような形にする工夫も経験的にいくつか知られている。

2.3. 変数分離型. $y' = X(x)Y(y)$ の形の常微分方程式を変数分離型と呼ぶ。
$X(x) = \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ だから、$F'(x) = X(x)$, $G'(y) = \dfrac{1}{Y(y)}$ となる $F(x)$, $G(y)$ が求まれば、$F(x) + C = G(y)$ (C は定数) が解となる。

例： $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (1-u)u.$ logistic 方程式。

$\dfrac{1}{(1-u)u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1$ だから両辺を積分して $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1-u)u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^t 1\mathrm{d}t$

$\dfrac{1}{(1-u)u} = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{1-u}$ であり、この u の関数の不定積分は

$\log|u| - \log|1-u| = \log|\dfrac{u}{1-u}|$ であるから、

$$\int_0^t \frac{1}{(1-u)u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{(1-u)u}\mathrm{d}u = \log|\frac{u(t)}{1-u(t)}| - \log|\frac{u(0)}{1-u(0)}| = t.$$

すなわち、$\dfrac{u(t)}{1-u(t)}\dfrac{1-u(0)}{u(0)} = \pm e^t.$ ここで $t = 0$ で $u = u(0)$ だから、$\pm$ は $+$ の方をとる。

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = \frac{u(0)}{1-u(0)}e^t.$$

$$u(t) = \frac{u(0)}{1-u(0)}e^t(1-u(t)).$$

$$(1 + \frac{u(0)}{1-u(0)}e^t)u(t) = \frac{u(0)}{1-u(0)}e^t$$

$$u(t) = \frac{u(0)e^t}{1-u(0)+u(0)e^t}$$

解は、$0 < u(0) < 1$ ならば、$\lim_{t\to\infty} u(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$.

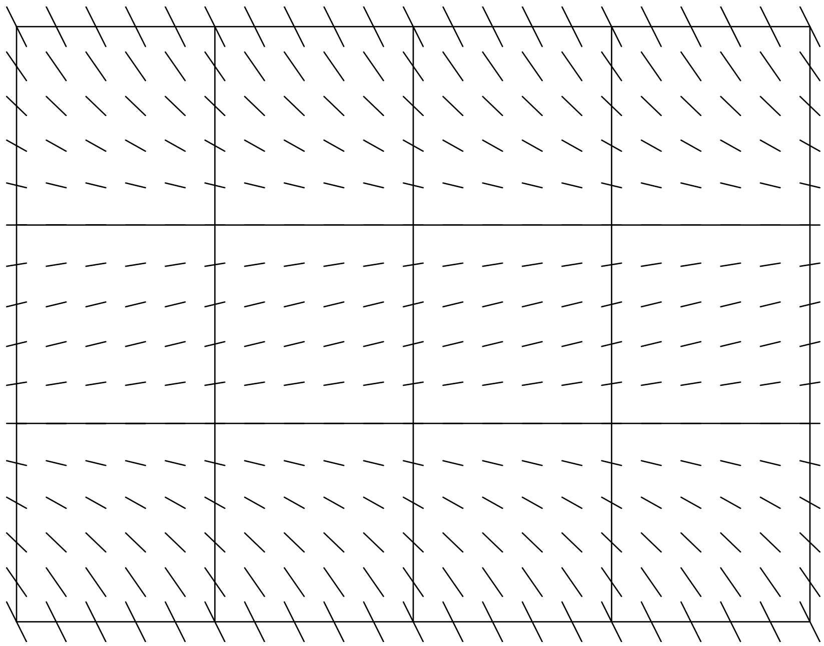
$u(0) > 1$ ならば、$\lim_{t\to\infty} u(t) = 1$, $\lim_{t\to\log\frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = +\infty$.

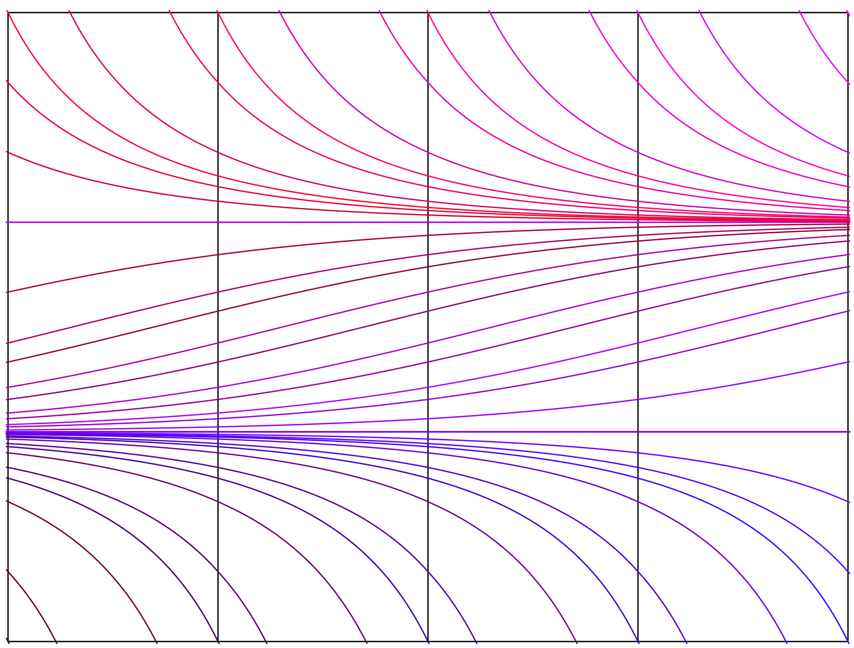
$u(0) < 1$ ならば、$\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$, $\lim_{t\to\log\frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = -\infty$.

反省。 不定積分として $\displaystyle\int \frac{1}{(1-u)u}\mathrm{d}u = \int 1\mathrm{d}t$ だから、$\log|\dfrac{u(t)}{1-u(t)}| = t + C.$
C を取り替えて、$\dfrac{u(t)}{1-u(t)} = Ce^t$ として、$C = \dfrac{u(0)}{1-u(0)}$ である。
ゆえに、$u(t) = \dfrac{Ce^t}{1+Ce^t} = \dfrac{u(0)e^t}{1-u(0)+u(0)e^t}.$

このように不定積分を積分定数を適当において定め、あとで積分定数を定める方が効率的かもしれない。

このような任意定数 C を含んだ解（の族）を一般解と呼ぶ。





$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Y(y)$ の形の常微分方程式は、x を y の関数と見た $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{Y(y)}$ と考えられる。このような x は y の関数として、定数を除いて定まる。これは (y,x) 平面では、$x(y)$ のグラフたちは、x 方向の平行移動で写りあうことを意味する。このことから、

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Y(y)$ の解を (y,x) 平面で考えると、１つの解を x 方向に平行移動したものは、解になっていることになる。上の例で確かめることができる。

問 (1). 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3x^2-1)(y-1)(y+1)$ の一般解を求めよ。

解答例. $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \int (3x^2-1)\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1})\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2}(\log|y-1| - \log|y+1|) + \text{定数} = \frac{1}{2}\log|\frac{y-1}{y+1}| + \text{定数}$$

右辺は $\displaystyle\int (3x^2-1)\mathrm{d}x = x^3 - x + \text{定数}$

従って $\log|\dfrac{y-1}{y+1}| = 2(x^3-x) + C_1.$

$\dfrac{y-1}{y+1} = Ce^{2(x^3-x)}$, $y-1 = Ce^{2(x^3-x)}(y+1)$,

$$y = \frac{1+Ce^{2(x^3-x)}}{1-Ce^{2(x^3-x)}}$$

問 (2). 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-1)y\cos x$ の $y(0) = \dfrac{1}{2}$ となる解を求めよ。

解答例. $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)y}\mathrm{d}y = \int \cos x\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)y}\mathrm{d}y = \int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})\mathrm{d}y$

$$= \log|y-1| - \log|y| + \text{定数} = \log|\frac{y-1}{y}| + \text{定数}$$

右辺は $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + \text{定数}$

従って $\log|\dfrac{y-1}{y}| = \sin x + C_1.$

$\dfrac{y-1}{y} = Ce^{\sin x}$, $y = \dfrac{1}{1-Ce^{\sin x}}$

ここで、$y(0) = \dfrac{1}{2}$ だから $C = -1$ で、$y = \dfrac{1}{1+e^{\sin x}}$

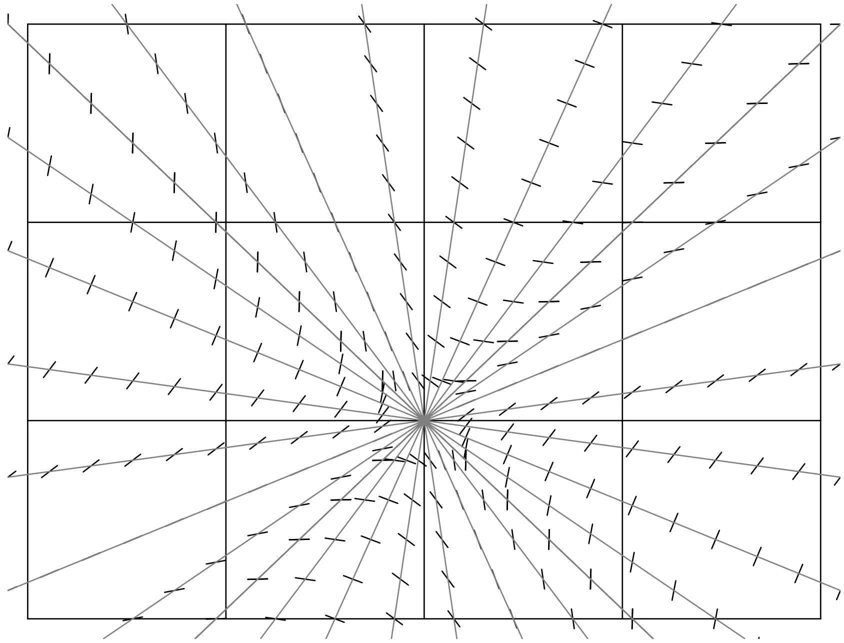
問 (3). 変数分離形の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X(x)Y(y)$ の解法をまとめよ。

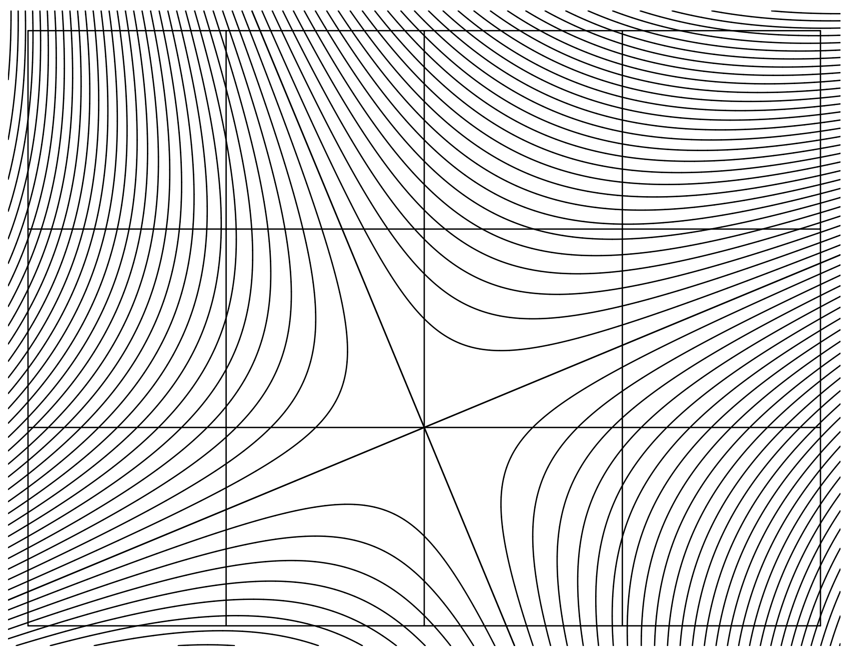
解答例. $\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{Y(y)} = X(x)$ を不定積分すると $\displaystyle\int \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{Y(y)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{Y(y)} = \int X(x)\mathrm{d}x + C$ を得る。この式は、$G(y) = F(x) + C$ の形をしている。G の逆関数を用いて y について解くことができれば、$y = G^{-1}(F(x)+C)$ が一般解となる。$x = x_0$ のときに $y = y_0$ となる解は $C = F(x_0) - G(y_0)$ としたものとして得られる。

2.4. **同次形.** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\dfrac{y}{x})$.
これは、傾きが原点を通る直線上で一定である様子を表している。ここで、本質的な変数は $z = \dfrac{y}{x}$ であろうと考えて、z が満たす常微分方程式を導く。

例。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$

$z = \dfrac{y}{x}$ とおく。$y = zx$ だから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x + z$.
従って、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \dfrac{1-z}{1+z} - z = \dfrac{1-2z-z^2}{1+z}$
これを書き直した $\dfrac{1+z}{1-2z-z^2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ の両辺を積分する。
まず、$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1+z}{1-2z-z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
一方、$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1+z}{1-2z-z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{z(x_0)}^{z}(x)\frac{1+z}{1-2z-z^2}\mathrm{d}z$ について、$w = 1-2z-z^2$ とすると、$\mathrm{d}w = -2(1+z)\mathrm{d}z$.
だから、左辺 $\displaystyle= \int_{w(z(x_0))}^{w(z(x))} -\frac{1}{2}\frac{1}{w}\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}(\log|w(z(x))| - \log|w(z(x_0))|)$.
次の関係式が得られた。
$\log|1-2z(x)-z(x)^2| - \log|1-2z(x_0)-z(x_0)^2| = -2(\log|x| - \log|x_0|)$
対数の関係を真数の関係になおすと、$\dfrac{1-2z(x)-z(x)^2}{1-2z(x_0)-z(x_0)^2} = \pm\dfrac{{x_0}^2}{x^2}$. ここで $\pm$ は x_0 から連続に変化する値だから $+$ をとる。
$1-2z(x)-z(x)^2 = \dfrac{{x_0}^2}{x^2}(1-2z(x_0)-z(x_0)^2)$ の変数を y に戻して、
$1-2\dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{y(x)}{x^2} = \dfrac{{x_0}^2}{x^2}(1-2\dfrac{y(x_0)}{x_0} - \dfrac{y(x_0)}{{x_0}^2})$.
整理して $x^2-2xy-y^2 = {x_0}^2 - 2x_0y(x_0) - y(x_0)^2$ が解である。($y = \cdots$ の形に直すことも容易である。)





変数分離型の計算の時と同じ反省。

不定積分として $\displaystyle\int \frac{1+z}{1-2z-z^2}\mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ だから、

$-\dfrac{1}{2}\log|1-2z-z^2| = \log|x| + C.$

従って、別の C に取り替えて $(1-2z-z^2)x^2 = C$. すなわち、$x^2-2xy-y^2=C$.

問（1）. 同次形常微分方程式　　　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$ に対し、$y(x) = x\,z(x)$ とおいて, z の満たす正規形常微分方程式　を求めよ。

（2）常微分方程式　の一般解 $z(x)$ を求めよ。

（3）常微分方程式　の $y(1)=2$ となる解 $y(x)$ を求めよ。

解答例. （１）$y=xz$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{x}{xz}-\dfrac{xz}{x}=\dfrac{2}{z}-z.$
$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{z}-2z\right)=\dfrac{2}{x}\ \dfrac{1-z^2}{z}.$
答。　　は　$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{x}\ \dfrac{1-z^2}{z}$
（２）$\displaystyle\int\frac{z}{1-z^2}\mathrm{d}z=\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x$ だから、$-\dfrac{1}{2}\log|1-z^2|=2\log|x|+C_1,\ 1-z^2=Cx^{-4}$
つまり、$z^2=1-Cx^{-4}.\ z=\pm\sqrt{1-Cx^{-4}}$
（３）$y=xz=\pm x\sqrt{1-Cx^{-4}}=\pm\sqrt{x^2-Cx^{-2}}$ において、$x=1$ のとき、$2=\pm\sqrt{1-C}$ だから、$C=-3,\ \pm$ は $+$ となり、$y=\sqrt{x^2+3x^{-2}}$

問. 同次形の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\dfrac{y}{x})$ の解法についてまとめよ。

解答例. $\dfrac{y}{x}=z$ とおくと、$y=xz$ だから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ である。従って、微分方程式は $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f(z)-z}{x}$ の変数分離型になる。$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\log|x|+C$ から、$H(z)=\log|x|+C$ の形の関係式を得る。$z=H^{-1}(\log|x|+C)$ と書かれれば、$y=xH^{-1}(\log|x|+C)$ の形の一般解を得る。$x=x_0$ のときに $y=y_0$ となる解は $C=H(\dfrac{y_0}{x_0})-\log|x_0|$ としたものとして得られる。（注意：このようなまとめを暗記してはいけない !! ）

2.5. １階線形常微分方程式. （定数変化法）

例。　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=x.$

y と $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ について、関数を係数として線形になっている。
まず、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=0$ を解くのが、線形な場合の常套手段である（線形同次方程式を解く）。
これは変数分離形だから、$\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x$ を積分して $\displaystyle\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x.$
つまり $\log|y|=-\dfrac{x^2}{2}+C.$ C を取り替えて、$y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ と書かれる。
もとの方程式の解を $y=C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ の形で探す。定数変化法という。
これを代入すると、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{-\frac{x^2}{2}}+C\dfrac{\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{d}x}+xCe^{-\frac{x^2}{2}}=x$
すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{-\frac{x^2}{2}}=x$ を得る。
$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=xe^{\frac{x^2}{2}}$ だから、$C(x)=\displaystyle\int xe^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=e^{\frac{x^2}{2}}+C_1$
従って、$y=(e^{\frac{x^2}{2}}+C_1)e^{-\frac{x^2}{2}}=1+C_1e^{-\frac{x^2}{2}}.$

問。 $t>0$ に対して定義された１階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{x}{t}=t^3$ の $x(1)=1$ となる解を求めよ。

解答例. 同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2\dfrac{x}{t} = 0$ の解は、
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t}\mathrm{d}t$ から $\log|x| = 2\log|t| + C_1$, $x = Ct^2$ である。
定数変化法を用いる。

$x(t) = C(t)t^2$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}t^2 = t^3$ を得る。
従って、$C = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C_2$
$x(t) = (\dfrac{t^2}{2} + C_2)t^2 = \dfrac{1}{2}(t^4 + 2C_2t^2)$ について、$x(1) = 1$ だから $C_2 = \dfrac{1}{2}$.
従って、$x(t) = \dfrac{1}{2}t^2(1 + t^2)$

問. 1階線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P(t)y = Q(t)$ について、解法をまとめよ。

解答例. 同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P(t)y = 0$ は変数分離型だから、次のように解かれる。
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int P(t)\mathrm{d}t$ から $\log|y| = -\int P(t)\mathrm{d}t + C$, C を取り替えて、$y = Ce^{-\int P(t)\mathrm{d}t}$
である。
定数変化法を用いる。$y = C(t)e^{-\int P(t)\mathrm{d}t}$ として、

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{-\int P(t)\mathrm{d}t} - C(t)P(t)e^{-\int P(t)\mathrm{d}t} + P(t)C(t)e^{-\int P(t)\mathrm{d}t} = Q(t)$$

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{-\int P(t)\mathrm{d}t} = Q(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}$ を得る。従って、$C(t) = \displaystyle\int Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C_1$ を得る。求める解は、$y(t) = (\displaystyle\int Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C_1)e^{-\int P(t)\mathrm{d}t}$
のようになる。

$t = t_0$ のときに $y = y_0$ となる解は $C_1 = C(t_0) - \displaystyle\int^{t_0} Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ としたものとして得られる。不定積分は1つとって決めており、それの t_0 での値を用いている。
(注意:このようなまとめを暗記してはいけない !!)

2.6. 1階線形微分方程式に帰着されるよく知られている微分方程式.

ベルヌーイの微分方程式

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P(t)y = Q(t)y^m$ $(m \neq 0, 1)$
(両辺を y^m で割ってみる。)
$z = y^{1-m}$ について $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + (1-m)P(t)z = (1-m)Q(t)$ となる。

リッカチ型微分方程式($\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ が独立変数の関数を係数とする y の2次式)
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$

ひとつの解 $\varphi(t)$ がわかっているとき、$z = y - \varphi$ は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ &= P(t)(y^2 - \varphi^2) + Q(t)(y - \varphi) = P(t)z(z + 2\varphi) + Q(t)z\end{aligned}$$

すなわち、

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - (2\varphi(t)P(t) + Q(t))z = P(t)z^2$ というベルヌーイ型の微分方程式を満たす。したがって $z = u^{-1}$ が 1 階線形微分方程式の解として求まる。このとき、$y(t) = \varphi(t) + z(t)^{-1}$ と求まる。