数理科学 II　（担当：坪井　俊）の小テスト（５月２３日）の解答例

問題１． (1) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (4x^3 - 2x)y(y+1)$ の一般解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\mathrm{d}y = \int (4x^3 - 2x)\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\mathrm{d}y = \int (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1})\mathrm{d}y$

$\displaystyle = (\log|y| - \log|y+1|) + 定数 = \log|\frac{y}{y+1}| + 定数$

右辺は $\displaystyle\int (4x^3 - 2x)\mathrm{d}x = x^4 - x^2 + 定数$

従って $\displaystyle\log|\frac{y}{y+1}| = x^4 - x^2 + C_1.$

$\displaystyle\frac{y}{y+1} = Ce^{x^4-x^2},\ y = Ce^{x^4-x^2}(y+1),\ y = \frac{Ce^{x^4-x^2}}{1 - Ce^{x^4-x^2}}$

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-1)(y+1)\cos x$ の $y(0) = 2$ となる解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \int \cos x\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1})\mathrm{d}y$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(\log|y-1| - \log|y+1|) + 定数 = \frac{1}{2}\log|\frac{y-1}{y+1}| + 定数$

右辺は $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + 定数$

従って $\displaystyle\log|\frac{y-1}{y+1}| = 2\sin x + C_1.$

$\displaystyle\frac{y-1}{y+1} = Ce^{2\sin x},\ y = \frac{1 + Ce^{2\sin x}}{1 - Ce^{2\sin x}}$

ここで、$y(0) = 2$ だから $C = \dfrac{1}{3}$ で、$y = \dfrac{3 + e^{2\sin x}}{3 - e^{2\sin x}}$

(3) 微分形式 $(y^3 - 2xy)\mathrm{d}x + (4x^2 - 2xy^2)\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^3 - 2xy) = 3y^2 - 2x,\ \dfrac{\partial}{\partial x}(4x^2 - 2xy^2) = 8x - 2y^2$ は異なるので，２変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ とならない。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^5}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{y^2 - 2x}{y^4}\mathrm{d}x + \dfrac{-2xy^2 + 4x^2}{y^5}\mathrm{d}y$ は $y \neq 0$ の範囲で 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y^2 - 2x}{y^4} = -2\dfrac{1}{y^3} + 8\dfrac{x}{y^5},\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{-2xy^2 + 4x^2}{y^5} = -2\dfrac{1}{y^3} + 8\dfrac{x}{y^5}$ は等しいので，２変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となる。

実際、$\displaystyle(\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^4})\mathrm{d}x + (\frac{-2x}{y^3} - \frac{-4x^2}{y^5}\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\frac{xy^2 - x^2}{y^4})$

(5) $t>0$ に対して定義された 1 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3\dfrac{x}{t}=t^3$ の $x(1)=2$ となる解を求めよ。

解答例 同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3\dfrac{x}{t}=0$ の解は、
$\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{3}{t}\mathrm{d}t$ から $\log|x|=3\log|t|+C_1$, $x=Ct^3$ である。
定数変化法を用いる。
$x(t)=C(t)t^3$ とすると、
$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}t^3=t^3$ を得る。
従って、$C=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C_2$
$x(t)=(t+C_2)t^3=(t^4+C_2t^3)$ について、
$x(1)=2$ だから $C_2=1$.
従って、$x(t)=t^4+t^3$

問題２． (1) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=3y_1$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_2$$
$$y_1(0)=1,\ y_2(0)=1$$

解答例 $y_1=C_1e^{3t}$, $y_2=C_2e^t$ が一般解だから、$y_1(0)=1$, $y_2(0)=1$ から、$C_1=1$, $C_2=1$ となり、$y_1=e^{3t}$, $y_2=e^t$ が解。ベクトルの形で書くと、$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}\\e^t\end{pmatrix}$ が解である。

(2) $A=\begin{pmatrix}5&-4\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$ に注意して、次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=5x_1-4x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=2x_1-x_2$$
$$x_1(0)=3,x_2(0)=3$$

解答例 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ と置く。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で、$y_1(0)=0,\ y_2(0)=3$ である。

従って、(1) から、$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3e^t\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ についての初期値問題の解となる。

$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^t\\3e^t\end{pmatrix}$ が求める解である。

(3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-4x_1+3x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-3x_1-4x_2$$
$$x_1(0)=2, x_2(0)=1$$

解答例 行列 $A=\begin{pmatrix}-4&+3\\-3&-4\end{pmatrix}$ の固有値は $-4\pm 3i$ であるが、これはそのような固有値をもつ行列のうち特別な形ものである。

この場合は、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} &= e^{tA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &= e^{-4t}\begin{pmatrix}\cos 3t&\sin 3t\\-\sin 3t&\cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{-4t}(2\cos 3t+\sin 3t)\\e^{-4t}(-2\sin 3t+\cos 3t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

のように解かれる。

例えば、$z=x_1+ix_2$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+i\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\\ &= (-4x_1+3x_2)+i(-3x_1-4x_2)\\ &= (-4-3i)(x_1+ix_2)=(-4-3i)z\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{-4-3i}z(0)=e^{(-4-3i)t}(2+i)\\ &= e^{-4t}(\cos 3t-i\sin 3t)(2+i)\\ &= e^{-4t}(2\cos 3t+\sin 3t)+ie^{-4t}(-2\sin 3t+\cos 3t)\end{aligned}$$

というように見つけることもできる。

問題３． a_1, a_2 を実数、$b(t)$, $c(t)$ を実数値関数とする。

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_2x=b(t)$ の解 $u(t)$,

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_2x=c(t)$ の解 $v(t)$, 実数 k, ℓ に対して、

$w(t)=ku(t)+\ell v(t)$ は２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_2x=kb(t)+\ell c(t)$ の解であることを示せ。

解答例 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+a_2w$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\mathrm{d}^2(ku+\ell v)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}(ku+\ell v)}{\mathrm{d}t}+a_2(ku+\ell v)\\
&=(k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\ell\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2})+a_1(k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\ell\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})+a_2(ku+\ell v)\\
&=k(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}++a_2u)+\ell(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+a_2v)=kb(t)+\ell c(t)
\end{aligned}
$$