数理科学II（担当：坪井　俊）小テスト　　５月２３日

問題１． (1) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (4x^3 - 2x)y(y+1)$ の一般解を求めよ。

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-1)(y+1)\cos x$ の $y(0) = 2$ となる解を求めよ。

(3) 微分形式 $(y^3 - 2xy)\mathrm{d}x + (4x^2 - 2xy^2)\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^5}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{y^2 - 2x}{y^4}\mathrm{d}x + \dfrac{-2xy^2 + 4x^2}{y^5}\mathrm{d}y$ は $y \neq 0$ の範囲で 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

(5) $t > 0$ に対して定義された 1 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 3\dfrac{x}{t} = t^3$ の $x(1) = 2$ となる解を求めよ。

問題２． (1) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 3y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \ y_2 \end{cases}$$
$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ に注意して、次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 5x_1 - 4x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \ 2x_1 - x_2 \end{cases}$$
$$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = 3$$

(3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -4x_1 + 3x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$
$$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 1$$

問題３． a_1, a_2 を実数、$b(t)$, $c(t)$ を実数値関数とする。

2 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t)$ の解 $u(t)$,

2 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = c(t)$ の解 $v(t)$, 実数 k, ℓ に対して、

$w(t) = ku(t) + \ell v(t)$ は 2 階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = kb(t) + \ell c(t)$ の解であることを示せ。