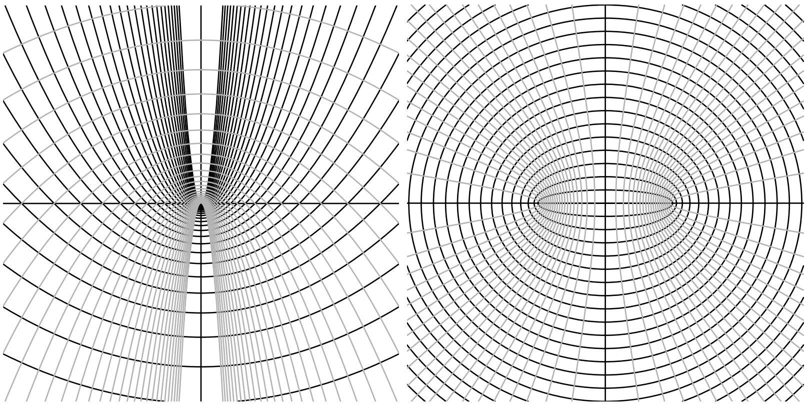

図 14.3　問 14.5 と問 14.6 の直交曲線族．焦点を共有する放物線あるいは楕円と双曲線である．

この２つは２つの成分を持つ量として同じに見えるが、ベクトル場はそれの生成するフローを考え、微分１形式に対しては、曲線に沿う線積分を考えるという意味で、考えられてきた経緯が異なっている。この２つの量を区別して考えることが、数学的な理論をはっきりさせるのに非常に重要であった。

２つの成分を持つ量として $(u(x,y),v(x,y))$、$(f(x,y),g(x,y))$ と書いていると区別できない。微分１形式に対しては、その起源を明らかにする $f(x,y)\,\mathrm{d}\,x+g(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ という書き方がある。ベクトル場 $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{q})=(u(x,y),v(x,y))$ には、次のように考えて、フローから生まれてきたことを表す表記法 $u(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ が用いられる。

ベクトル場の生成するフローを $\overrightarrow{q}(t;\overrightarrow{q_0})=(x(t;x_0,y_0),y(t;x_0,y_0))$ とする。もとのベクトル場との関係は

$$u(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}(0;x_0,y_0),\quad v(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}(0;x_0,y_0)$$

である。このベクトル場が生成するフローにより、各点 (x_0,y_0) を通るパラメータ表示された曲線が定まっている。平面上の関数 $F(x,y)$ のこの曲線に沿う変化は $F(x(t;x_0,y_0),y(t;x_0,y_0))$ を微分して、次のように計算される。

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F(x(t;x_0,y_0),y(t;x_0,y_0))\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x(t;x_0,y_0),y(t;x_0,y_0))\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}(t;x_0,y_0)\\&\quad+\frac{\partial F}{\partial y}(x(t;x_0,y_0),y(t;x_0,y_0))\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}(t;x_0,y_0)\end{aligned}$$

この式の $t=0$ における値は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}(0;x_0,y_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}(0;x_0,y_0)\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)u(x_0,y_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)v(x_0,y_0)\end{aligned}$$

である。これを、

$$\{u(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\}F(x,y)$$

の (x_0,y_0) における値とみる。

これがベクトル場がフローを起源にしているということを意識した $u(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ という表記法の由来である。

このようにフローが定まるとフローによって移動したときの関数の変化をはかることができる。特に、あたりまえのようなことであるが、フローに沿って移動したときの x 座標（という関数）の変化率が $u(x,y)$ であり、y 座標（という関数）の変化率が $v(x,y)$ である。

問 15.1. ベクトル場 $u(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ が生成するフローを $\vec{q}(t;\vec{q_0})$ とする。正の関数 $h(x,y)$ について、$h(x,y)u(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+h(x,y)v(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ が生成するフローを $\vec{r}(t;\vec{q_0})$ とすると、$\vec{r}(t;\vec{q_0})$ の軌道と $\vec{q}(t;\vec{q_0})$ の軌道はパラメータを除いて一致することを示せ。

さて、以上のことを踏まえた上で、平面上の微分１形式とベクトル場の間の関係を考える。

微分１形式 $f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ に対し、同じ係数を持つベクトル場 $f(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+g(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ を考えると両者の定める曲線族は直交している。

特に、関数 $F(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}\,F=\dfrac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}\,y$ に対して、ベクトル場 $\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y}$ は勾配ベクトル場と呼ばれ、グラフの傾斜が最大の方向を向いている。 $\operatorname{grad} F$ は勾配ベクトル場を表すのが普通である。従って、全微分 $\mathrm{d}\,F$ が 0 にならない点ではベクトル場に沿って、関数 F の値は増加する。

問 15.2. 全微分 $\mathrm{d}\,F$ が 0 にならない点でベクトル場

$$\frac{1}{\|\operatorname{grad} F\|^2}\operatorname{grad} F=\frac{1}{(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial F}{\partial y})^2}\{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\}$$

を考えると、このベクトル場の定める（フロー $\vec{q}(t;\vec{q_0})$ が定義されている限り、）フロー $\vec{q}(t;\vec{q_0})$ に沿って、$F(x,y)$ の値は t だけ増加する、すなわち $F(\vec{q}(t;\vec{q_0}))=F(\vec{q_0})+t$ を示せ。

例 15.3. 関数 $F(x,y)=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$ を考える。勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} F=-x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$ が生成するフローは $\begin{pmatrix}x(t;x_0,y_0)\\ y(t;x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_0e^{-t}\\ y_0e^t\end{pmatrix}$ である。一方、

$$\frac{1}{\|\operatorname{grad} F\|^2}\operatorname{grad} F=-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

であって、このベクトル場の生成するフロー自体は書きにくい。上の問 15.2 を使って考えると、(x_0,y_0) を通る軌道は、パラメータを除いて $\operatorname{grad} F$ の軌道と一致し、$xy=x_0y_0$ 上にある。また時間 t の後には $-x^2+y^2=-{x_0}^2+{y_0}^2+2t$ を満たすから、

$$x^4+(-{x_0}^2+{y_0}^2+2t)x^2-{x_0}^2{y_0}^2=0$$

をみたす。$x_0>0,\ y_0>0$ とすると、

$$x=\sqrt{\frac{-(-{x_0}^2+{y_0}^2+2t)+\sqrt{(-{x_0}^2+{y_0}^2+2t)^2+4{x_0}^2{y_0}^2}}{2}}$$
$$y=\sqrt{\frac{(-{x_0}^2+{y_0}^2+2t)+\sqrt{(-{x_0}^2+{y_0}^2+2t)^2+4{x_0}^2{y_0}^2}}{2}}$$

注意すべきことは、微分方程式は $(0,0)$ では定義されていないこと、また、$y_0=0$ の時の解は $-\infty < t < {x_0}^2$ でしか定義されていないことである。しかし、$t\longrightarrow {x_0}^2$ の時に、解は $(0,0)$ に近づく。

問 15.4. 関数 $F(x,y)$ について、$\operatorname{grad} F(0,0)=\vec{0}$ かつ $\operatorname{grad} F(x,y)=\vec{0}$ と

なる点 (x,y) は原点 $(0,0)$ のみであるとする。また、任意の点 (x,y) で $F(x,y)$ の 2 回微分の行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial_y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ の固有値がともに負であるとする。このとき、ベクトル場 $\operatorname{grad} F$ のすべての解曲線 $\vec{q}(t;\vec{q_0})$ は、$t \to \infty$ の時、$(0,0)$ に収束することを示せ。

15.2　ハミルトンベクトル場（7／15）

単振動の運動方程式を考えたときに、位置 x と速度 v について、常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ を考えた。(7 ページ参照。）これを平面上のベクトル場と見ると、$v\dfrac{\partial}{\partial x} - ax\dfrac{\partial}{\partial v}$ と書かれる。エネルギーは $E = \dfrac{v^2}{2} + a\dfrac{x^2}{2}$ という (x,v) 平面上の関数である。E の全微分は $\mathrm{d}\,E = ax\,\mathrm{d}\,x + v\,\mathrm{d}\,v$, 勾配ベクトル場は $ax\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial v}$ のように書かれる。運動方程式の与えるベクトル場は、勾配ベクトル場を xv 平面上の各点で -90° 回転して得られている。勾配ベクトル場は、等位線に直交していたから、運動方程式の与えるベクトル場の定める積分曲線は、E の等位線にある。従って、運動でエネルギーが保存される。

この議論は次のように一般化される。平面上の関数 $f(x,y)$ の勾配ベクトル場 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y}$ は、$f(x,y)$ の等位線に垂直な軌道を持つフローを定める。しかし、平面上では、勾配ベクトル場を各点で -90° 回転したベクトル場 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}$ が考えられる。このベクトル場が生成するフローの軌道は、f の等位線上にある。

このベクトル場 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}$ を $f(x,y)$ をハミルトン関数とする**ハミルトンベクトル場**と呼ぶ。

問 15.5. ハミルトンベクトル場が生成するフローは面積を保つことを示せ。

このように関数から得られる勾配ベクトル場を -90° 回転して等位面の方向のベクトル場を作る操作は、偶数次元で、座標が 2 つずつ対になっているときに行うことができる。

たとえば、空間の座標 $\vec{q} = (x_1,x_2,x_3)$ と速度 $\vec{p} = (p_1,p_2,p_3)$ を合わせると 6 次元の空間となるが、x_1p_1, x_2p_2, x_3p_3 と対にするのが自然で、$E(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)$ というハミルトン関数に対して、その勾配ベクトル場 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial E}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ を、対になっている座標について -90° 回転して、ハミルトンベクトル場 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial E}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ を得る。

問 15.6. 惑星の運動について、$\vec{q} = (x_1,x_2,x_3)$, $\vec{p} = m\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t} = (p_1,p_2,p_3)$ として、E を書き表し、ハミルトンベクトル場を書き下せ。(8 ページ参照。）

ハミルトンベクトル場が生成するフローが考えられるが、そのフローの軌道がハミルトン関数の等位面上にあること、そのフローがその次元の体積を保つことが示される。

15.3　平面上のガウスの定理（7／15）

平面のいくつかの曲線で囲まれた領域 D の境界を ∂D とする．∂D に沿う外向きの単位ベクトルを $\partial\vec{n}$ とし、∂D に沿う正の向きの長さのパラメータを s

と書くことにする。

次の定理を平面上のガウスの定理と呼ぶ。

定理 15.7 (平面上のガウスの定理)**.** 平面上のベクトル場 $\vec{p}(\vec{q}) = (u(x,y), v(x,y))$ に対し、

$$\int_D \operatorname{div} \vec{p} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \int_{\partial D} \vec{p} \bullet \vec{n} \, \mathrm{d}\, s$$

証明。 この証明には、グリーンの定理を用いる。微分 1 形式 $-v(x,y)\,\mathrm{d}\,x + u(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ を考えると、グリーンの定理は、

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} -v(x,y)\,\mathrm{d}\,x + u(x,y)\,\mathrm{d}\,y &= \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\ &= \textstyle\int_D \operatorname{div} \vec{p}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\end{aligned}$$

と書かれる。境界 ∂D では、$(x(s), y(s))$ の速度ベクトル $\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}, \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}\right)$ は単位ベクトルで、$\vec{n} = \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}, -\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}\right)$ となるから、

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} -v(x,y)\,\mathrm{d}\,x + u(x,y)\,\mathrm{d}\,y &= \int_{\partial D} \left(-v(x,y)\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} + u(x,y)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}\right) \mathrm{d}\,s \\ &= \vec{p} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}\,s\end{aligned}$$

これで、平面上のガウスの定理が証明された。

注意。平面上のベクトル場 $\vec{p}(\vec{q}) = (u(x,y), v(x,y))$ に対し、微分 1 形式 $u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + v(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ を考えたとき、グリーンの定理

$$\int_{\partial D} u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + v(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

に現れる、$-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ をベクトル場 $\vec{p}$ のローテーションと呼び、$\operatorname{rot} \vec{p}$ と書く。∂D を曲線として $c(s)$ と表すとき、グリーンの定理は、

$$\int_{\partial D} \vec{p} \bullet \frac{\mathrm{d}\,c}{\mathrm{d}\,s}\,\mathrm{d}\,s = \int_D \operatorname{rot} \vec{p}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

と書かれる。