であるが、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial}{\partial x_0}\vec{q}\,(t;\vec{q_0}) = \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q}\,(t;\vec{q_0}) = \frac{\partial}{\partial x_0}\vec{p}\,(\vec{q}\,(t;\vec{q_0})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_0}(\vec{q}\,(t;\vec{q_0})) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_0}(\vec{q}\,(t;\vec{q_0})) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial}{\partial y_0}\vec{q}\,(t;\vec{q_0}) = \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q}\,(t;\vec{q_0}) = \frac{\partial}{\partial y_0}\vec{p}\,(\vec{q}\,(t;\vec{q_0})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_0}(\vec{q}\,(t;\vec{q_0})) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y_0}(\vec{q}\,(t;\vec{q_0})) \end{pmatrix}$$

である。ここで $\vec{p}\,(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ はフローを生成するベクトル場である。

上の式で $t=0$ とすると、$J(\vec{Q}_0)_{(\vec{q_0})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから、

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{q_0})}\right]_{t=0} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_0}(\vec{q_0}) & 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_0}(\vec{q_0}) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial u}{\partial y_0}(\vec{q_0}) \\ 0 & \dfrac{\partial v}{\partial y_0}(\vec{q_0}) \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x_0}(\vec{q_0}) + \frac{\partial v}{\partial y_0}(\vec{q_0})$$

従って $D(s)$ は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}D(s) = \{\frac{\partial u}{\partial x_0}(\vec{q}\,(s;\vec{q_0})) + \frac{\partial v}{\partial y_0}(\vec{q}\,(s;\vec{q_0}))\}D(s)$$

を満たす。

特に、$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$ であるとすると、ヤコビ行列式 $\det J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q_0})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(s;x_0,y_0) & \dfrac{\partial x}{\partial y_0}(s;x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_0}(s;x_0,y_0) & \dfrac{\partial y}{\partial y_0}(s;x_0,y_0) \end{vmatrix}$ は s によらず定数であり、$s=0$ のときには単位行列の行列式であるから 1 である。従って、ヤコビ行列 $J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q_0})}$ の行列式は 1 であり、このベクトル場が生成するフローは面積を保つことになる。

定義 13.5. ベクトル場 $\vec{p}\,(\vec{q}\,) = (u(x,y), v(x,y))$ に対して定まる平面上の関数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ を平面上のベクトル場の**発散**（**ダイバージェンス**）といい、$\mathrm{div}\,\vec{p}$ で表す。

上に示したことから、次の定理が得られる。

定理 13.6. ベクトル場 $\vec{p}\,(\vec{q}\,) = (u(x,y), v(x,y))$ が生成するフロー $\vec{q}\,(t;\vec{q_0})$ に対し、点 $\vec{q_0}$ から、$\vec{q}\,(t;\vec{q_0})$ へ写るときの面積の変化の割合 $D(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}D(t) = (\mathrm{div}\,\vec{p}\,)(\vec{q}\,(t;\vec{q_0}))D(t)$$

$D(0)=1$ を満たす。とくに、$\mathrm{div}\,\vec{p} = 0$ ならば、フローは面積を保つ。

問 13.7. ベクトル場 $\vec{X}(\vec{q}\,) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の発散を求めよ。対応するフロー $\vec{q}\,(t;\vec{q_0})$ による $t=t_0$ における円板 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ の像の面積を求めよ。

14　平面上の２つの曲線族

14.1　平面上の２つの関数（７／１）

平面上の関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ が与えられ、ある領域で、$\mathrm{grad}\, f \neq \vec{0}$, $\mathrm{grad}\, g \neq \vec{0}$ としよう。このとき、いくつかの問題が考えられる。

１． $f(x,y)$ が一定の曲線たちと $g(x,y)$ が一定の曲線たちは一致するか。

２． $f(x,y)$ が一定の値のときに $g(x,y)$ が極大極小になるのはどのようなときか。

最初の問題の答は簡単である。すなわち $f(x,y)$, $g(x,y)$ の偏微分のベクトルが平行ということである．つまり、いたるところ $\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$ であることが条件である。このとき、$f(x,y)$ と $g(x,y)$ の値の比は、曲線上で一定である。$f(x,y)$ の値は $g(x,y)$ の値が定まれば定まるという意味で $f(x,y)$ の値は $g(x,y)$ の値の関数であり、$g(x,y)$ の値は $f(x,y)$ の値の関数である。つまり、関数 $h(t)$ があって、$f(x,y) = h(g(x,y))$ のように書かれる。このときは、$f(x,y)$, $g(x,y)$ の間に**関数関係**があるといわれる。

第２の問題は、条件付極値問題と呼ばれる。$f(x,y)$ が一定という曲線族と $g(x,y)$ が一定という曲線族の位置関係を考えると、$f(x,y)$ が一定の曲線上で $g(x,y)$ の極大極小を与えている点では、その場所の $g(x,y)$ が一定の曲線上でも $f(x,y)$ の極大極小を与えており、$f(x,y)$ が一定という曲線族と $g(x,y)$ が一定という**曲線族の接点の集合**の点になることがわかる。曲線族の接点においては、$\mathrm{grad}\, f$, $\mathrm{grad}\, g$ は平行（１次従属）であり、$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$ となる。従って、まず曲線族の接点の集合と f が一定という集合の共通部分を調べることになる。これは $\mathrm{grad}\, f \neq \vec{0}$ として、ある λ という実数があって

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

を満たしているとみられる。あるいは $\varPhi(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda\{f(x,y) - c\}$ という３変数の関数について $\mathrm{grad}\, \varPhi = \vec{0}$ という方程式を考えているといっても良い。このように新しい変数 λ を導入して極大極小の必要条件を求めることを**ラグランジュの未定乗数法**と呼ぶ。多くの場合、この必要条件を満たす点で極大極小になっているが、現実に、極大、極小になっていることを確かめるのは容易ではない。$f(x,y)$ が一定の曲線は閉集合であるが、これがさらに有界集合となっていると、「有界閉集合上の連続関数には最大値最小値が必ず存在する」から、最大値最小値を求めるためには実際的な方法を与えている。

例題 14.1. 実数 x, y が $(x^2-1)^2 + y^2 = 4$ を満たすとき、xy^2 の極値を求めよ。

例題 14.1 の答。 $\varPhi(x,y,\lambda) = xy^2 - \lambda((x^2-1)^2 + y^2 - 4)$ とおく。

$$\mathrm{grad}\, \varPhi = (y^2 - 4\lambda x(x^2-1), 2xy - 2\lambda y, (x^2-1)^2 + y^2 - 4) = \vec{0}$$

から、　$y^2 = 4\lambda x(x^2-1)$,　$y(x-\lambda) = 0$,　$(x^2-1)^2 + y^2 = 4$ を得る。

ここで、$y = 0$ とすると、第１式から $x = 0, \pm 1$ または $\lambda = 0$ である。第３

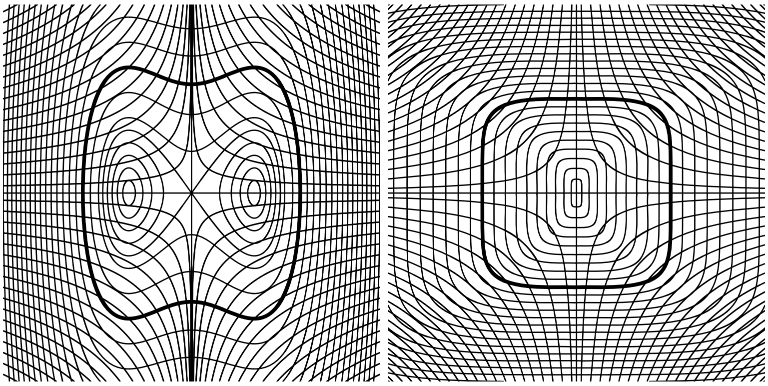

図 14.1　例題 14.1 と問 14.2 の関数の等高線．曲線族が接する点のなす曲線の位置が予想できる．太い線が条件を与えている．

式から $\lambda = 0$, $x^2 - 1 = \pm 2$.　ゆえに $(x, y) = (\pm\sqrt{3}, 0)$, このとき $xy^2 = 0$ である。

$y \neq 0$ とすると、$\lambda = x$ であり、第１式から $y^2 = 4x^2(x^2 - 1)$, 第３式から $(x^2 - 1)^2 + 4x^2(x^2 - 1) - 4 = 0$、すなわち $5x^4 - 6x^2 - 3 = 0$ を得る。従って $x^2 = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$、ここで − は不適。$x = \pm\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}$, $y = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18 + 2\sqrt{6}}$ を得る。$(x, y) = (\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18 + 2\sqrt{6}})$ で $xy^2 = \dfrac{72 + 8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}$, $(x, y) = (-\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18 + 2\sqrt{6}})$ で $xy^2 = -\dfrac{72 + 8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}$ である。

$\{(x, y) \mid (x^2 - 1)^2 + y^2 = 4\}$ は原点を中心とする正方形 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ に含まれ、平面内の有界閉集合である。従ってこの上で連続な関数 xy は、最大値最小値を持つ。従って、$(x, y) = (\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18 + 2\sqrt{6}})$ で、xy^2 は最大値 $\dfrac{72 + 8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}$ をとり、$(x, y) = (-\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}, \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{18 + 2\sqrt{6}})$ で、xy^2 は最小値 $-\dfrac{72 + 8\sqrt{6}}{25}\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{5}}$ をとる。また、$(x, y) = (\sqrt{3}, 0)$ で極小値 0 を、$(x, y) = (-\sqrt{3}, 0)$ で極大値 0 をとる。

問 14.2. 実数 x, y が $x^4 + y^6 = 1$ を満たすとき、xy の極値を求めよ。

14.2　直交曲線族（７／１）

平面上の２つの曲線族が直交しているかどうかは曲線族がベクトル場、微分１形式で与えられている場合には係数についての条件で容易に判定できる。

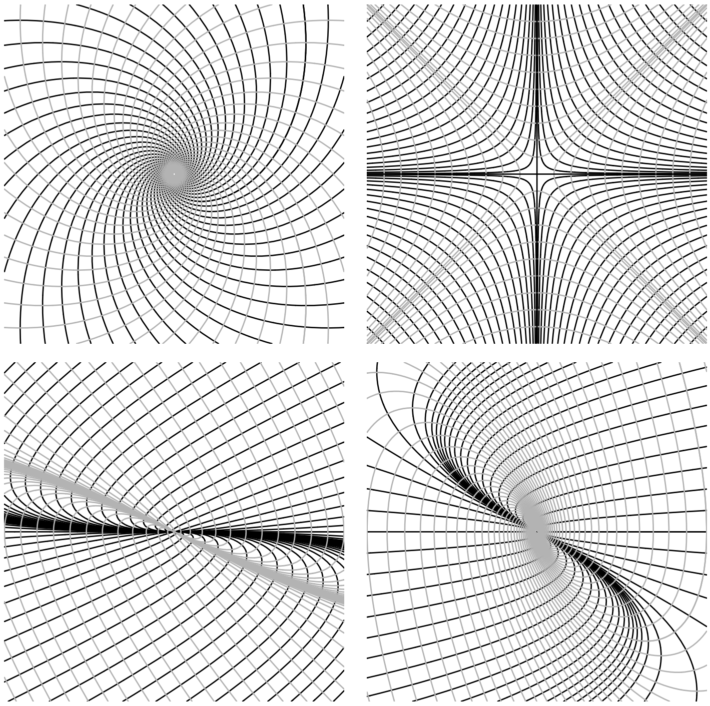

図 14.2　問 14.4 の直交曲線族. 上のような対数螺旋の直交曲線族, 直交双曲線族の他に, 下の段のような直交曲線族も得られる.

問 14.3. (1) 2つの曲線族が微分1形式 $f_1\,\mathrm{d}\,x+g_1\,\mathrm{d}\,y$, $f_2\,\mathrm{d}\,x+g_2\,\mathrm{d}\,y$ で与えられているとき、これらが直交する条件を求めよ。
(2) 2つの曲線族がベクトル場 (u_1, v_1), (u_2, v_2) で与えられているとき、これらが直交する条件を求めよ。
(3) 微分1形式 $f\,\mathrm{d}\,x+g\,\mathrm{d}\,y$ であたえられる曲線族とベクトル場 (u, v) で与えられる曲線族が直交する条件を求めよ。

問 14.4. 線形なベクトル場 $\overrightarrow{p}(x,y)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
$(\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\neq 0)$ が原点以外で定める曲線族に対し、直交する曲線族を求めよ。図 14.2 参照。

問 14.5. 曲線族 $y=\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{a}{2}$ $(a>0)$ および $y=-\dfrac{x^2}{2b}+\dfrac{b}{2}$ $(b>0)$ は、それぞれ y 軸以外をうめつくし、y 軸以外でに直交する曲線族であることを示せ。

問 14.6. $f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}$,
$g(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ とするとき、$f(x,y)$ の等位線の族と $g(x,y)$ の等位線の族は直交することを示せ。

15　平面上の微分形式とベクトル場

15.1　微分形式とベクトル場の表記法（7／15）

ベクトル場 $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{q})$ は、各点 $\overrightarrow{q}=(x,y)$ にそこを始点とする成分 $(u(x,y), v(x,y))$ のベクトルを定めている。

一方、微分1形式 $f(x,y)\,\mathrm{d}\,x+g(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ でも、各点 $\overrightarrow{q}=(x,y)$ に $(f(x,y), g(x,y))$ という2成分をもつ量（ベクトル）が定まっている。