

10.2 積分可能条件 (6 / 10)

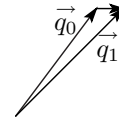
さて、微分 1 形式 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$ は、1 つの関数 $f(x, y)$ の x および y に関する偏微分を係数にもっている非常に特別なものである。この微分 1 形式に対し、曲線 $\vec{\gamma}(t) = (\xi(t), \eta(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) に沿う線積分の値 $\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = f(\vec{\gamma}(t_1)) - f(\vec{\gamma}(t_0))$ は端点にしか依存しない。一般の微分 1 形式の曲線沿う線積分の値は端点だけでなく曲線の通り道によるはずである。仮に、この線積分が端点だけによるならば、微分 1 形式は上のようなものであることがわかる。

すなわち、もしも線積分が端点にしかよらないとすると原点 $(0, 0)$ から $\vec{q} = (x, y)$ への曲線 $\gamma_{\vec{q}}$ をとってそれに沿って積分して

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{\vec{q}}} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

を得るが、 $\vec{q}_0 = (x_0, y_0)$ に対し、 $\gamma_{\vec{q}_0}$ を通り、さらに (x_0, y_0) から x 軸に平行に $\vec{q}_1 = (x_0 + h, y_0)$ にいたる曲線を $\gamma_{\vec{q}_1}$ とすると

$$\begin{aligned} & F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0) \\ &= \int_{\gamma_{\vec{q}_1}} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) \\ &\quad - \int_{\gamma_{\vec{q}_0}} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \end{aligned}$$



であるから、 $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ となる。同様に、 $\gamma_{(x_0, y_0)}$ を通り、さらに (x_0, y_0) から y 軸に平行に $(x_0, y_0 + k)$ にいたる曲線を $\gamma_{\vec{q}_2}$ とすると $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$ がわかる。

それでは、 $f(x, y), g(x, y)$ をみて、このような $F(x, y)$ の偏微分になっているかどうか判定できるだろうか。

もしも $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$ で、 $f(x, y), g(x, y)$ が連続微分可能ならば、 $F(x, y)$ は 2 回連続微分可能で、 $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}$ は連続で値が等しくなるから

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$$

とならなければいけない。微分積分の本⁷⁾ 参照

定義 10.5. 平面上の微分 1 形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ に対し、 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ を積分可能条件という。また積分可能条件を満たす微分 1 形式は閉形式と呼ばれる。

長方形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 上の微分 1 形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ については、 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ ならば、このような $F(x, y)$ が存在することがわかる。

実際、長方形の中に 1 点を取り、その点を (x_0, y_0) とする。線分 (x_0, y_0) と $\vec{q} = (x, y)$ を結ぶ線分 $\gamma_{\vec{q}}$ を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)$ ($0 \leq t \leq 1$) とし、この線分に沿う微分 1 形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ の線積分により、

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{\gamma_{\vec{q}}} f(x, y) dx + g(x, y) dy \\ &= \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) dt \\ &\quad + \int_0^1 g(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0) dt \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))t(x - x_0) dt \\
 &\quad + \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))t(y - y_0) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))t(x - x_0) dt \\
 &\quad + \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))t(y - y_0) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))}{dt} t dt \\
 &\quad + \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\
 &= \left[f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \cdot t \right]_0^1 \\
 &\quad - \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \cdot \frac{dt}{dt} dt \\
 &\quad + \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\
 &= f(x, y)
 \end{aligned}$$

である。第2の等号では積分可能条件を使い、第4の等号では部分積分を使った。

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g(x, y) \text{ も同様に示される。}$$

問 10.6. 微分1形式

$\omega = (a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2) dx + (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2) dy$ が閉形式である条件を求めよ。問 10.3 の結果と比較せよ。

10.3 経路に依存する線積分 (6 / 10)

今度は線積分が経路による場合を考えてみよう。長方形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 上の微分1形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ では、積分が経路により異なるのは $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ の場合が起こる。 (x_1, y_1) から長方形の辺上を (x_2, y_1) , (x_2, y_2) とたどった場合と、 (x_1, y_1) から長方形の辺上を (x_1, y_2) , (x_2, y_2) とたどった場合を考える。

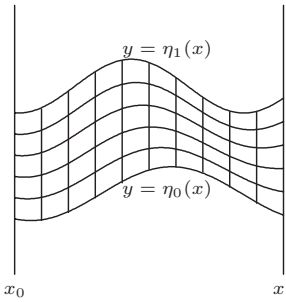


図 10.1 グラフにはさまれた領域についての積分は変数変換する.

前者の線積分は

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} g(x_2, y) dy$$

であり、後者の線積分は

$$\int_{y_1}^{y_2} g(x_1, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_2) dx$$

である。この差を次のように書いてみる。

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x, y_1) - f(x, y_2)) dx + \int_{y_1}^{y_2} (g(x_2, y) - g(x_1, y)) dy$$

さらに、少し恣意的であるが、次のように変形する。

$$- \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx dy$$

これは $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ という長方形上の関数を積分したものであるが、この関数がいつでも 0 になることが長方形上で、 $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$ を満たす $F(x, y)$ が存在するための条件 (積分可能条件、定義 10.5) であった。

定理 10.7 (微分 1 形式のグリーンの定理:長方形の場合). 長方形

$\square = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 上の微分 1 形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ に対して、

$$\int_{\partial \square} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{\square} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

ただし、線積分は長方形 $\square = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ の辺を反時計回りに回るように (長方形を左に見る方向に) おこなうこととする。このように 4 つの辺をたどったものを $\partial \square$ (\square の境界) と表した。

さて、この長方形の辺を時計回りに回ると、線積分の符号が変わってしまう。このときは長方形を裏返してその辺の向きが逆になったと考える。さらに、裏返した長方形の上での積分は符号が反対になると考えると上の式は裏返した長方形に対しても成立することになる。記号としては長方形を裏返したものを $-\square$ とかくと重積分について $\int_{-\square} = - \int_{\square}$, 線積分について $\int_{\partial(-\square)} = \int_{-\partial \square} = - \int_{\partial \square}$ と思えばよいということである。

長方形ではなく一般の曲線とそれにより囲まれる領域は関数のグラフによりはさまれた $K = \{(x, y) \mid \eta_0(x) \leq y \leq \eta_1(x), x_0 \leq x \leq x_1\}$ のように書かれる部分の和集合と思える。

例題 10.8. $K = \{(x, y) \mid \eta_0(x) \leq y \leq \eta_1(x), x_0 \leq x \leq x_1\}$ とする。微分 1

形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ に対して、

$$\int_{\partial K} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_K \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

を示せ。

ヒント: $\eta(x, t) = \eta_0(x) + (\eta_1(x) - \eta_0(x))t$ として、変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \eta(x, t) \end{pmatrix} \text{ により積分の変数変換をする。}$$

例題 10.8 の答。まず、 $\eta_0(x) < \eta_1(x)$ の場合を扱う。 $\int_{\partial K}$ は次のように計算される。図 10.1 参照。

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} (f(x, \eta_0(x)) + g(x, \eta_0(x))\eta_0'(x)) dx + \int_{\eta_0(x_1)}^{\eta_1(x_1)} g(x_1, y) dy \\ & - \int_{x_0}^{x_1} (f(x, \eta_1(x)) + g(x, \eta_1(x))\eta_1'(x)) dx - \int_{\eta_0(x_0)}^{\eta_1(x_0)} g(x_0, y) dy \end{aligned}$$

$\eta(x, t) = \eta_0(x) + (\eta_1(x) - \eta_0(x))t$ とおくと、 $\eta(x, 0) = \eta_0(x)$, $\eta(x, 1) = \eta_1(x)$ であり、第 1 項と第 3 項の被積分関数は $f(x, \eta(x, t)) + g(x, \eta(x, t)) \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)$ の $t = 0, 1$ での値の差である。第 1 項と第 3 項をまとめて、 t について微分して積分した形に直すと

$$\begin{aligned} & - \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x, \eta(x, t)) + g(x, \eta(x, t)) \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) \right]_{t=0}^{t=1} dx \\ & = - \int_{x_0}^{x_1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (f(x, \eta(x, t)) + g(x, \eta(x, t)) \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)) dt dx \\ & = - \int_{x_0}^{x_1} \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} \right) dt dx \end{aligned}$$

となる。さて、第 2 項と第 4 項は積分の区間が異なっているが、 $\eta(x, t)$ を考えると、積分の区間は $[\eta(x_1, 0), \eta(x_1, 1)]$, $[\eta(x_0, 0), \eta(x_0, 1)]$ である。そこで y から t に変数変換すると、第 2 項、第 4 項は

$$\begin{aligned} & \int_{\eta_0(x_1)}^{\eta_1(x_1)} g(x_1, y) dy = \int_0^1 g(x_1, \eta(x_1, t)) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x_1, t) dt, \\ & - \int_{\eta_0(x_0)}^{\eta_1(x_0)} g(x_0, y) dy = - \int_0^1 g(x_0, \eta(x_0, t)) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x_0, t) dt \end{aligned}$$

となるから、あわせて

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[g(x, \eta(x, t)) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \right]_{x=x_0}^{x=x_1} dt \\ & = \int_0^1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} (g(x, \eta(x, t)) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t)) dx dt \\ & = \int_0^1 \int_{x_0}^{x_1} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \right) dx dt \end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\int_{\partial K} = \int_{x_0}^{x_1} \int_0^1 \left(- \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x, t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, \eta(x, t)) \right) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) dx dt$$

となる。一方、 $\int_K \left(- \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) dx dy$ を (x, t) に変数変換すると、変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \eta(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \eta_0(x) + (\eta_1(x) - \eta_0(x))t \end{pmatrix} \text{ のヤコビ行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta_0'(x) + (\eta_1'(x) - \eta_0'(x))t & \eta_1(x) - \eta_0(x) \end{pmatrix} \text{ で、ヤコビ行列式が}$$

$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) = \eta_1(x) - \eta_0(x) > 0$ であるから同じ式を得ることがわかる。

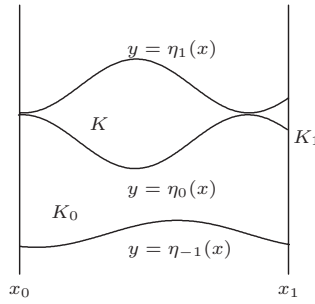


図 10.2 領域の差として考える.

さて、 $\eta_0(x) = \eta_1(x)$ となる点がある場合は次のように考えよう。 $\eta_{-1}(x)$ を $\eta_{-1}(x) < \eta_0(x)$ となるようにとる。図 10.2 参照。微分 1 形式 $f dx + g dy$ は

$$K_1 = \{(x, y) \mid \eta_{-1}(x) \leq y \leq \eta_1(x), x_0 \leq x \leq x_1\}$$

で定義されているとする。この K_1 は $\eta_1(x) - \eta_{-1}(x) > 0$ を満たすから、

$$\int_{\partial K_1} f dx + g dy = \int_{K_1} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

が成立し、

$$K_0 = \{(x, y) \mid \eta_{-1}(x) \leq y \leq \eta_0(x), x_0 \leq x \leq x_1\}$$

においても $\eta_0(x) - \eta_{-1}(x) > 0$ だから、

$$\int_{\partial K_0} f dx + g dy = \int_{K_0} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

が成立する。 $K_1 = K_0 \cup K$ であり、 $\int_{K_1} = \int_{K_0} + \int_K$ である。境界における線積分について ∂K_0 と ∂K とにおける線積分は η_0 のグラフの部分が共通で向きが逆である。これを考慮してあわせたものが ∂K_1 における線積分になる。従って $\int_{\partial K_1} = \int_{\partial K_0} + \int_{\partial K}$ がわかる。 K_1, K_0 に対して成立している等式からその差として

$$\int_{\partial K} f dx + g dy = \int_K \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

を得る。

上の例題の前半の部分は長方形からの写像でパラメータがつけられた領域に対して一般化される。

問 10.9. 写像 $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi(s, t) \\ \eta(s, t) \end{pmatrix}$ により、長方形 $\square = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$ が K

に 1 対 1 に写されるとする。ヤコビ行列式 $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \xi}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \eta}{\partial t}(s, t) \end{pmatrix} > 0$ とする。 K の境界 ∂K は長方形の境界の像であると考え。このとき微分 1 形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ に対して、

$$\int_{\partial K} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_K \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

を示せ。

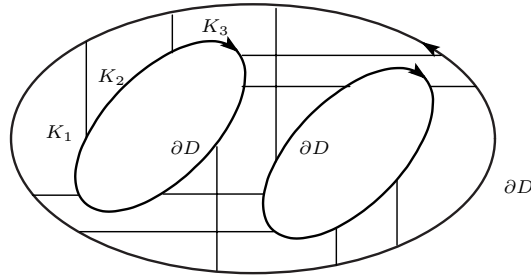


図 10.3 領域を分割してグリーン定理が示される.

10.4 グリーン定理 (6 / 17)

平面上の単純な形の領域を組み合わせ、平面のいくつかの曲線で囲まれた領域 D をつくることができる。逆に平面のいくつかの曲線で囲まれた領域 D を分割して、 x 軸の線分上の 2 つの関数 $\eta_0(x)$, $\eta_1(x)$ のグラフにはさまれた形の領域、 y 軸の線分上の 2 つの関数 $\xi_0(y)$, $\xi_1(y)$ のグラフにはさまれた形の領域に分割することができる。このことから、平面の領域 D に対しグリーン定理が示される。

定理 10.10 (グリーン定理). 平面のいくつかの曲線で囲まれた領域 D の境界を ∂D とする。平面上の微分 1 形式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ に対し、

$$\int_{\partial D} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) dx dy$$

ただし、 ∂D に沿う線積分は領域 D を左に見る方向におこなう。

証明. D の境界の曲線は、滑らかな曲線で境界の各点の近傍では x 軸上あるいは y 軸上の関数のグラフと表される。従って、 D を、 x 軸、 y 軸に平行な線で十分細かく分割すると、分割された領域では、 x 軸の線分上の 2 つの関数 $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ にはさまれた形の領域、または y 軸の線分上の 2 つの関数 $\xi_1(y)$, $\xi_2(y)$ にはさまれた形の領域になる。こうして分割した領域を K_1, \dots, K_k とすると、

$$\int_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{K_i} \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) dx dy$$

各々の、 K_i について例題 10.8 により、

$$\int_{K_i} \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) dx dy = \int_{\partial K_i} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

が成立する。 ∂K_i は、もともと ∂D の一部分であった曲線と、領域 D を分割する直線の一部の線分からなるが、領域 D を分割する直線の一部の線分は、2 つの小領域 K_i , K_j の共通の境界として現れ、 K_i , K_j の境界として線分に与えられる向きは、反対向きである。従って、これらの線分上の積分は足し合わせる時に打ち消しあい、もともと ∂D の一部分であった曲線上の積分を足し合わせたものが残る。従って

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial K_i} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{\partial D} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

グリーン定理にあらわれる積分は領域 D 上とその境界上のものだけであるからこの定理は領域 D 上で定義された微分 1 形式に適用される。

例 10.11. D を平面のいくつかの曲線で囲まれた領域とし、 D の境界を ∂D とする。