この曲面の法線方向は

$$\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}(s_0,t_0)\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}(s_0,t_0)=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial\eta}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial s} & \frac{\partial\zeta}{\partial t}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial\zeta}{\partial s} & \frac{\partial\zeta}{\partial t}\\ \frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\xi}{\partial t}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\xi}{\partial t}\\ \frac{\partial\eta}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\end{vmatrix}\right)$$

で与えられる。

9.3　曲面の面積（6／3）

パラメータ表示された曲面 $\vec{q}(s,t)=(\xi(s,t),\eta(s,t),\zeta(s,t))$ に対して、st 平面上の小正方形 $\{(s_0,t_0)+(h,k)\mid 0\leqq h\leqq\delta,\ 0\leqq k\leqq\delta\}$ は、$\delta\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}(s_0,t_0)=\delta\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial s}\\ \frac{\partial\eta}{\partial s}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial s}\end{pmatrix}$, $\delta\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}(s_0,t_0)=\delta\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial t}\\ \frac{\partial\eta}{\partial t}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}\end{pmatrix}$ を辺に持つ平行四辺形に近い面に写される。そこでこの平行四辺形の面積と正方形の面積の比は $\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}$ と $\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}$ を辺とする平行四辺形の面積となる。

例題 2.2（5 ページ）で計算したように、$\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}$ と $\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}$ を辺とする平行四辺形の面積は 3 次元のベクトルの外積を用いて、

$$\left\|\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right\|=\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{\partial\eta}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial s} & \frac{\partial\zeta}{\partial t}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial\zeta}{\partial s} & \frac{\partial\zeta}{\partial t}\\ \frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\xi}{\partial t}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\xi}{\partial t}\\ \frac{\partial\eta}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\end{vmatrix}^2}$$

で与えられる。

従って、この積分 $\int\left\|\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right\|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ が曲面の面積を与えていると考えられる。

曲面の面積は、次のように、曲面に厚みをつけたときの体積との関係で考える方が良いと思われる。

問 2.4（6 ページ）によって、$\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}$ は接平面の基底である $\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}$, $\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}$ に垂直であることがわかる。すなわち、$\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}$ は法線方向のベクトルである。この方向の単位ベクトル $\vec{n}(s,t)=(n_1(s,t),n_2(s,t),n_3(s,t))$ とする。

$$\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}=\left\|\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right\|\vec{n}$$

曲面 $\vec{q}(s,t)$ と $\vec{q}(s,t)+\varepsilon\vec{n}(s,t)$ の間にはさまれる部分の体積を考える。それは、$(s,t,0)$ の近くで定義された写像

$$(s,t,u)\longmapsto\vec{q}(s,t)+u\,\vec{n}(s,t)=\begin{pmatrix}\xi(s,t)+u\,n_1(s,t)\\ \eta(s,t)+u\,n_2(s,t)\\ \zeta(s,t)+u\,n_3(s,t)\end{pmatrix}$$

の $0\leqq u\leqq\varepsilon$ の部分の像の体積である。この体積は変数変換（問 8.8、39 ページ参照）により求められる。この写像の $u=0$ におけるヤコビ行列は
$J=\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial s},\frac{\partial\vec{q}}{\partial t},\vec{n}\right)$ であり、

$$\left\|\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right\|\det J=\det\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial s},\frac{\partial\vec{q}}{\partial t},\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right)=\left\|\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right\|^2$$

だから、$u=0$ における行列式の値は $\det J=\left\|\frac{\partial\vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right\|$ である。$|\det J|$ の

積分 $\int_0^{\varepsilon}\int |\det J|\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,u$ が厚み ε をつけた体積を表すが、この体積の ε についての微分の $\varepsilon=0$ における値、$\int |\det J|\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t = \int \|\frac{\partial \vec{q}}{\partial s}\times\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}\|\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t$ が曲面の面積を表す。

9.4　空間の曲面のまとめ（6／3）

空間の滑らかな曲面はパラメータ表示、グラフ表示、陰関数による表示が出来る。

パラメータ表示のヤコビ行列の階数が 2 ならば、2 変数の逆写像定理により、座標のうち 2 つをパラメータになるようにパラメータを取り換えることができ、第 3 の座標が他の 2 つの座標の関数と見られ、曲面はそのグラフとなる。また、陰関数の一つの座標についての偏微分が 0 でなければ、残りの 2 つの座標の関数のグラフに書かれる。

各点において滑らかな曲面であるような空間の図形について次が成り立つ。

定理 9.1. 空間の有界な閉集合 S について以下の性質が同値である。

- 陰関数表示
  すべての $\vec{q}=(x_0,y_0,z_0)\in C$ に対し、ある正実数 δ に対して空間における δ 近傍 U をとると、U 上で定義された関数 $F(x,y,z)$ で、U 上で $(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})\neq\vec{0}$ をみたすものがあって、
  $C\cap U=\{(x,y,z)\mid F(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0)\}\cap U$ となる。
- グラフ表示
  すべての $\vec{q}=(x_0,y_0,z_0)\in C$ に対し、ある正実数 δ に対して空間における δ 近傍 U をとると、(x_0,y_0) の δ 近傍上で定義された関数 $h(x,y)$ が存在して $C\cap U=\{(x,y,z)\mid z=h(x,y)\}\cap U$ となるか、または (x_0,z_0) の δ 近傍上で定義された関数 $g(x,z)$ が存在して $C\cap U=\{(x,y,z)\mid y=g(x,z)\}\cap U$ となるか、または (y_0,z_0) の δ 近傍上で定義された関数 $f(y,z)$ が存在して $C\cap U=\{(x,y,z)\mid x=f(y,z)\}\cap U$ となる。
- パラメータ表示
  すべての $\vec{q}=(x_0,y_0,z_0)\in C$ に対し、ある正実数 δ_0 より小さい任意の正実数 δ に対して空間における δ 近傍 U をとると、円板 $\{(s,t)\mid s^2+t^2<r^2\}$ $(r>0)$ 上で定義された U に値を持つ写像 $\vec{\Phi}(s,t)=\begin{pmatrix}\xi(s,t)\\ \eta(s,t)\\ \zeta(s,t)\end{pmatrix}$ で、ヤコビ行列 $\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\xi}{\partial t}\\ \frac{\partial\eta}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial s} & \frac{\partial\zeta}{\partial t}\end{pmatrix}$ のランクが 2 であり、$\vec{\Phi}(s_1,t_1)=\vec{\Phi}(s_2,t_2)$ ならば、$(s_1,t_1)=(s_2,t_2)$ となるようなものが存在し,
  $C\cap U=\{\vec{\Phi}(s,t)\mid s^2+t^2<r^2\}$ となる。

この表示の関係は、平面の曲線の表示についての定理 6.3（24 ページ）の関係と同様である。定理 6.3 のときは、さらにそれらは有限個の閉曲線の和集合であることもいえた。空間の曲面について、そのような形の命題を書くためには円周に対応する 2 次元の曲面は何かを明らかにしなければならない。3 次元空間に存在しうる曲面（境界のない曲面）は向き付けを持つことが知られており，向き付けられる連結なコンパクトな曲面は球面（図 7.3, 29 ページ楕円面)、トーラス（図 7.4, 30 ページ)、種数 2 の曲面（図 9.1)、種数 3 の曲面（図 9.1)、

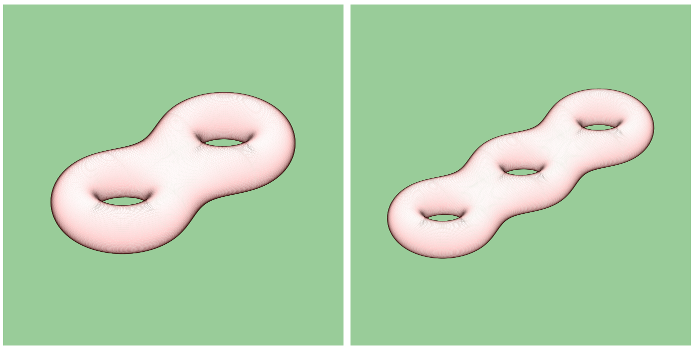

図 9.1 種数２の曲面, 種数３の曲面.

種数４の曲面、…になることが知られている。このような研究が２０世紀から現代にいたる多様体の研究に発展していったのである。パラメータ表示は有限個のコンパクトな向き付け可能な曲面からの写像の存在というように書くのが、曲線が有限個の閉曲線の和集合であるというの定式化に対応するものである。多様体の本[7]、曲面の本[7] 参照。

10 線 積 分

10.1 偏微分からの関数の復元（６／１０）

平面上の関数の微分の様子がわかっていると曲線に沿う関数の値の変化を記述できる。

$$
\begin{aligned}
f(\xi(t_1),\eta(t_1)) - f(\xi(t_0),\eta(t_0)) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}\,f(\xi(t),\eta(t))}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t \\
= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}\,t &+ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

パラメータをとりかえて、同じ曲線が $(\xi(\tau(s)),\eta(\tau(s)))$ のように表されていると、

$$
\begin{aligned}
&f(\xi(t_1),\eta(t_1)) - f(\xi(t_0),\eta(t_0)) \\
&= f(\xi(\tau(s_1)),\eta(\tau(s_1))) - f(\xi(\tau(s_0)),\eta(\tau(s_0))) \\
&= \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathrm{d}\,f(\xi(\tau(s)),\eta(\tau(s)))}{\mathrm{d}\,s}\,\mathrm{d}\,s \\
&= \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(\tau(s)),\eta(\tau(s)))\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(\tau(s))\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,s}(s)\,\mathrm{d}\,s \\
&\qquad + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(\tau(s)),\eta(\tau(s)))\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(\tau(s))\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,s}(s)\,\mathrm{d}\,s
\end{aligned}
$$

となるが、この積分は、前の積分の変数 t を $t=\tau(s)$ として置換積分したものに等しい。従って積分の値は曲線のパラメータのとり方によらないのだから、パラメータを与える項とそれ以外を区別して $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ の (x,y) を $(\xi(t),\eta(t))$ で, $\mathrm{d}\,x$ を $\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}\,t$ で, $\mathrm{d}\,y$ を $\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}\,t$ で置き換えたものが最初の積分であると考える。これは置換積分のやりかたと同じである。さらに、$(\xi(t),\eta(t))$ を $(\xi(\tau(s)),\eta(\tau(s)))$ に取り換えたときも同じ考え方で２番目の積分が得られている。

現実には、上の積分の答は $f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)$ であって、始点と終点の座標だけできまっている。しかし、今までのところ、曲線をとってそれに沿って積分をしたとき、パラメータのとり方に従って $\mathrm{d}\,x$, $\mathrm{d}\,y$ の取り換え方を工夫すると $f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)$ が得られることを説明した。ここで、曲線に沿う積分を考える対象を、$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ の形の式から、$f(x,y)\,\mathrm{d}\,x+g(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ という形の式全体に拡張する。これを平面上の１次微分形式あるいは**微分１形**

式と呼ぶ。

例 10.1. a を実数とする。$y\,\mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y$ の $(x, a(x^2-1))$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ で与えられる曲線 γ_a に沿う積分。

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_a} y\,\mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y &= \int_{-1}^{1} a(x^2-1)\,\mathrm{d}\,x - x(2ax)\,\mathrm{d}\,x \\ = \quad \int_{-1}^{1} a(-x^2-1)\,\mathrm{d}\,x &= \Big[-a\frac{x^3}{3} - ax \Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}a \end{aligned}$$

この例のように始点終点が同じでも曲線をかえると積分が異なってしまうこともおきる。しかし、曲線を指定すると積分がきちんと決まる。

定義 10.2. 微分１形式 $f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ に対して $(\xi(t), \eta(t))$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ によって与えられる曲線 γ に沿う**線積分**を

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\xi(t), \eta(t)) \frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{t_1} g(\xi(t), \eta(t)) \frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

で定義する。

積分を考えるときは曲線 γ にパラメータ t が増加する向きが定まっていると考える。向きが逆になると積分の符号が変わる。曲線 γ の向きを逆にしたものを $-\gamma$ と書く。

問 10.3. γ_1 を $t \in [-1, 1]$ をパラメータとする曲線 $(t^2, t^3 - t)$ とする．また γ_2 を同じパラメータの曲線 $(t^3 - t, t^2)$ とする。微分１形式

$$\omega = (a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)\,\mathrm{d}\,x + (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2)\,\mathrm{d}\,y$$

の線積分 $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega$, $\displaystyle\int_{\gamma_2} \omega$ を求めよ。

線積分は曲線 γ を $(\xi(t), \eta(t))$ $(t_0 \leqq t \leqq t_{\frac{1}{2}})$, $(\xi(t), \eta(t))$ $(t_{\frac{1}{2}} \leqq t \leqq t_1)$ で表される２つの曲線 γ_1, γ_2 に分割すると $\displaystyle\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$ をみたす。この式は逆に２つの曲線 γ_1, γ_2 をつないだ曲線 γ を考えるときも成立する。

$(\xi(t), \eta(t))$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ で表される曲線 γ は $(\xi(t_1), \eta(t_1)) = (\xi(t_0), \eta(t_0))$ のとき閉曲線と呼ばれるが、閉曲線上の積分はそれを一つの点で分けた曲線に沿う積分とする。閉曲線にもパラメータが増加する向きを定めておく必要がある。

問 10.4. 平面上の点 (x_0, y_0) と正実数 r_0 が ${r_0}^2 \neq {x_0}^2 + {y_0}^2$ を満たしているとする。γ を $t \in [0, 2\pi]$ をパラメータとする円 $(x_0 + r_0\cos t, y_0 + r_0\sin t)$ とする．次の微分１形式 ω_1, ω_2 について γ に沿う線積分 $\displaystyle\int_{\gamma} \omega_1$, $\displaystyle\int_{\gamma} \omega_2$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y \\ \omega_2 &= \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

ヒント：曲線を “極座標” $(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$ の形に表してみる。