

と書かれる。従って、

$$\begin{aligned} & \vec{G}(\vec{p}_2) - \vec{G}(\vec{p}_1) \\ &= (J(\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{p}_1))})^{-1}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) - (J(\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{p}_1))})^{-1}\varepsilon(\vec{G}(\vec{p}_2), \vec{G}(\vec{p}_1)) \end{aligned}$$

を得る。ここで  $\varepsilon(\vec{G}(\vec{p}_2), \vec{G}(\vec{p}_1))$  について、 $\vec{G}$  がリプシッツ連続であることを使くと、

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{q}_2 \rightarrow \vec{q}_1} \frac{\|\varepsilon(\vec{G}(\vec{p}_2), \vec{G}(\vec{p}_1))\|}{\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|} \\ &= \lim_{\vec{q}_2 \rightarrow \vec{q}_1} \frac{\|\varepsilon(\vec{G}(\vec{p}_2), \vec{G}(\vec{p}_1))\| \|\vec{G}(\vec{p}_2) - \vec{G}(\vec{p}_1)\|}{\|\vec{G}(\vec{p}_2) - \vec{G}(\vec{p}_1)\| \|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|} = 0 \end{aligned}$$

がわかる。従って、 $J(\vec{G})_{(\vec{p}_1)} = (J(\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{p}_1))})^{-1}$  であり、前に述べたように、 $J(\vec{G})_{(\vec{p}_1)}$  は  $\vec{p}_1$  について連続である。

問 8.5. 空間における逆写像定理を述べ、証明せよ。

### 8.6 積分の変数変換 (5 / 27, 6 / 3)

平面の点  $(x, y)$  に対し、平面の点  $(u(x, y), v(x, y))$  を対応させる写像の偏微分から作ったヤコビ行列  $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$  について、

$$\begin{pmatrix} u(x+h, y+k) \\ v(x+h, y+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x, y, h, k) \\ \varepsilon_2(x, y, h, k) \end{pmatrix}$$

だから、 $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$  ならば、 $xy$  座標における小さな長方形

$[x, x+h] \times [y, y+k]$  は、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$  に平行な辺を持つ平行四辺形に

近い図形に写されるが、この平行四辺形の面積は  $\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right| hk$  となる。この性質を良く考えて次の積分の変数変換の公式が得られる。

定理 8.6 (積分の変数変換). 平面の点  $(x, y)$  に対し、平面の点  $(u(x, y), v(x, y))$  を対応させる連続微分可能写像が平面の有界領域  $A$  を平面の有界領域  $B$  に写し、これが逆写像をもつとする。平面上の (または領域  $B$  の閉包上の) 連続関数  $f(u, v)$  に対し、積分の間の次の等式が成立する。

$$\int_B f(u, v) \, du \, dv = \int_A f(u(x, y), v(x, y)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right| dx \, dy$$

$u(x, y), v(x, y)$  が 2 回連続微分可能としたときのこの定理の証明の要点を見ておこう。

35 ページの変形のように、2 変数関数  $g(x, y) = g(\vec{q})$  に対し、ベクトル  $\vec{r} = (a, b)$  方向の直線  $\vec{q} + t\vec{r}$  において、

$$g(\vec{q} + t\vec{r}) = g(\vec{q}) + a \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q} + s\vec{r}) ds + b \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q} + s\vec{r}) ds$$

この右辺は次のように変形される。

$$\begin{aligned} & g(\vec{q}) + ta \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}) + tb \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}) \\ & + a \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q} + s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}) \right) ds + b \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q} + s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}) \right) ds \end{aligned}$$

$g(x, y)$  の 2 階微分  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$  の絶対値が  $M$  以下ならば、35 ページの評価式は

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q} + s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}) \right| &\leq \sqrt{2}Ms \|\vec{r}\| \\ \left| \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q} + s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}) \right| &\leq \sqrt{2}Ms \|\vec{r}\| \end{aligned}$$

となる。従って、

$$g(\vec{q} + t\vec{r}) = g(\vec{q}) + ta \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}) + tb \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}) + \varepsilon(\vec{q}, t\vec{r})$$

について、

$$\begin{aligned} |\varepsilon(\vec{q}, t\vec{r})| &\leq |a| \int_0^t \sqrt{2}Ms \|\vec{r}\| ds + |b| \int_0^t \sqrt{2}Ms \|\vec{r}\| ds \\ &= (|a| + |b|) \frac{\sqrt{2}M \|\vec{r}\| t^2}{2} \leq M \|\vec{r}\|^2 t^2 \end{aligned}$$

さて、小長方形の像が、平行四辺形に近いということを定式化する。 $A$  は 1 辺の長さが  $L$  の正方形に含まれる。十分大きな自然数  $N$  をとって、一辺の長さが  $\frac{2}{N}$  の正方形の網をかけ、多くとも  $\frac{L^2 N^2}{4}$  個の小正方形に分割する。各小正方形の中心  $\vec{q}_i = (x_i, y_i)$  から出るベクトル  $\vec{r} = (a, b)$  の方向の直線  $\vec{q}_i + t\vec{r} = (x_i, y_i) + t(a, b)$  について

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u(x_i + at, y_i + bt) \\ v(x_i + at, y_i + bt) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u(x_i, y_i) \\ v(x_i, y_i) \end{pmatrix} + at \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + bt \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x_i, y_i, at, bt) \\ \varepsilon_2(x_i, y_i, at, bt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、偏微分は  $(x_i, y_i)$  での値である。 $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|$  は、 $A$  上で  $u, v$  の 2 階微分の絶対値が  $M$  以下であるとすると、それぞれ、 $M \|\vec{r}\|^2 t^2$  以下であるから、

$$\sqrt{(\varepsilon_1(x_i, y_i, at, bt))^2 + (\varepsilon_2(x_i, y_i, at, bt))^2} \leq \sqrt{2}t^2(a^2 + b^2)M$$

となる。小正方形上では  $t^2(a^2 + b^2) \leq \frac{2}{N^2}$  である。小正方形

$[x_i - \frac{1}{N}, x_i + \frac{1}{N}] \times [y_i - \frac{1}{N}, y_i + \frac{1}{N}]$  の

$\begin{pmatrix} u(x_i, y_i) \\ v(x_i, y_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix}$  による像の小平行四辺形を考える。小

正方形の像と小平行四辺形の位置関係を考えると、上の評価式から、小正方形の辺の像は小平行四辺形の辺から距離  $\frac{2\sqrt{2}M}{N^2} \leq \frac{3M}{N^2}$  以下にあることがわかる。図 8.4 参照。

小平行四辺形の辺の長さは  $\frac{2}{N} \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2}$  および  $\frac{2}{N} \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2}$  である。次のように  $A$  上で  $u, v$  の偏微分の絶対値の大きさを評価しておく。

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \leq K.$$

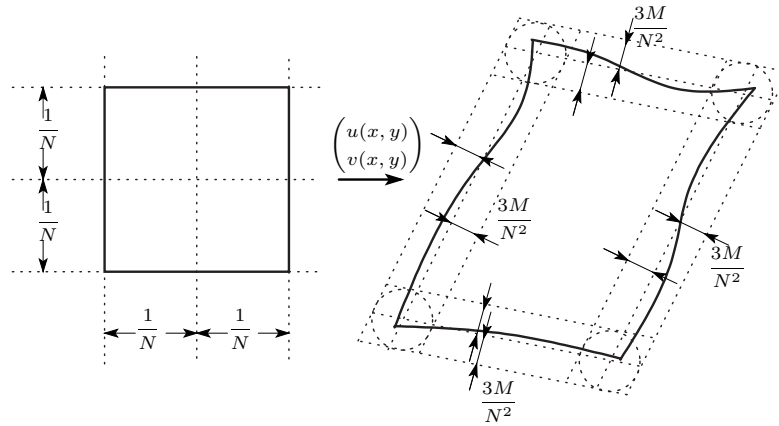


図 8.4 小正方形の像は小平行四辺りに近い。

そうすると小平行四辺形の辺の長さとはもに  $\frac{2\sqrt{2}K}{N} \leq \frac{3K}{N}$  より小さいと考えてよい。従って、小正方形の像の面積は  $\frac{4}{N^2} |\det J| - 4\left(\frac{3K}{N} + 2\frac{3M}{N^2}\right) \frac{3M}{N^2}$  より大きく  $\frac{4}{N^2} |\det J| + 4\left(\frac{3K}{N} + 2\frac{3M}{N^2}\right) \frac{3M}{N^2}$  より小さい。ただし  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$  である。関数  $f(u, v)$  の積分は  $\max\{f(u, v), 0\}$ ,  $-\min\{f(u, v), 0\}$  の積分の差として得られるから、負にならない関数  $f(u, v)$  だけを考える。

関数  $f(u, v)$  の積分は、一方で、 $B$  を小正方形に分割して、小正方形の面積と小正方形上の  $f(u, v)$  の最大値または最小値の積の和の極限である。これが定理の左辺を与える。 $f(u, v)$  の積分は、他方で、 $B$  を  $A$  の小正方形の像で分割し、小正方形の像を小平行四辺りに置き換えて考えると、小正方形の像における  $f(u, v)$  の最大値と  $\frac{4}{N^2} |\det J| + 4\left(\frac{3K}{N} + 2\frac{3M}{N^2}\right) \frac{3M}{N^2}$  の積の  $N^2$  個の和の極限と小正方形の像における  $f(u, v)$  の最小値と  $\frac{4}{N^2} |\det J| - 4\left(\frac{3K}{N} + 2\frac{3M}{N^2}\right) \frac{3M}{N^2}$  の積の  $N^2$  個の和の極限には含まれる実数であるが、分割を細かくすると、 $\frac{4}{N^2} |\det J|$  と  $f(u, v)$  の小正方形の像における最大値または最小値の積の和は、 $\int_A f(u(x, y), v(x, y)) |\det J| dx dy$  に収束し、誤差の項は  $f(u, v)$  の  $B$  での最大値を  $C$  とすると、小正方形の個数は  $\frac{L^2 N^2}{4}$  個以下であったから、 $4\left(\frac{3K}{N} + 2\frac{3M}{N^2}\right) \frac{3M}{N^2} C \frac{L^2 N^2}{4}$  よりも小であるがこれは  $N \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する。これが定理の右辺を与える。

問 8.7.  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  が連続微分可能とするとときに、変数変換の公式はどのように示されるか。

問 8.8. 空間の点  $\vec{q} = (x, y, z)$  に対し、空間の点  $\vec{p}(\vec{q}) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$  を対応させる 2 回連続微分可能写像が空間の有界領域  $A$  を空間の有界領域  $B$  に写し、これが逆写像をもつとする。平面上の (または領域  $B$  の閉包上の) 連続関数  $f(u, v, w)$  に対し、積分の間の次の変数変換の公式が成立することを示せ。

$$\int_B f(\vec{p}) du dv dw = \int_A f(\vec{p}(\vec{q})) |\det J(\vec{p})(\vec{q})| dx dy dz$$

## 9 空間の曲面 3

## 9.1 曲面のパラメータ表示 (6 / 3)

曲線のパラメータ表示は実数直線あるいは区間から平面あるいは空間への写像であった。曲面のパラメータ表示は平面あるいは平面内の多角形や円板から空間への写像である。これは  $(\xi(s, t), \eta(s, t), \zeta(s, t))$  のように書かれるものである。このとき、この表示が滑らかな曲面を表すということは、局所的に2つの座標を変数とする関数のグラフとなっていることだと考える。たとえば、 $(\xi(s, t), \eta(s, t))$  についてのヤコビ行列の行列式  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix}$  が0でなければ、逆写像定理 8.1 (31 ページ) により、 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$  という写像で  $(x, y) = (\xi(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \eta(\sigma(x, y), \tau(x, y)))$  となるものがあるから、 $(\xi(s, t), \eta(s, t), \zeta(s, t))$  のパラメータ  $(s, t)$  を  $(x, y)$  に取り換えると、曲面は  $(x, y, \zeta(\sigma(x, y), \tau(x, y)))$  のように表され、 $(x, y)$  の関数  $\zeta(\sigma(x, y), \tau(x, y))$  のグラフとなる。行列式  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{pmatrix}$  または  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial s}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \end{pmatrix}$  が0でなければ、曲面は  $(y, z)$  の関数または  $(z, x)$  の関数のグラフになる。

これらのどれかの行列式が0でないことは、行列  $\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{pmatrix}$  のランク (階数) が2である、または「この行列の列ベクトルが1次独立である」と言い換えられる。線形代数の本<sup>?)</sup> 参照。

## 9.2 パラメータ表示された曲面の接平面 (6 / 3)

$\vec{q}(s, t) = (\xi(s, t), \eta(s, t), \zeta(s, t))$  の  $(s_0, t_0)$  におけるヤコビ行列のランクが2で、 $(x_0, y_0, z_0) = \vec{q}(s_0, t_0) = (\xi(s_0, t_0), \eta(s_0, t_0), \zeta(s_0, t_0))$  の近傍で曲面を表しているとする。この曲面上にあり、点  $(x_0, y_0, z_0)$  を通る曲線はパラメータ  $(s, t)$  における曲線  $(\sigma(u), \tau(u))$  ( $(\sigma(u_0), \tau(u_0)) = (s_0, t_0)$ ) を定める。これは空間内では  $\vec{q}(\sigma(u), \tau(u)) = \begin{pmatrix} \xi(\sigma(u), \tau(u)) \\ \eta(\sigma(u), \tau(u)) \\ \zeta(\sigma(u), \tau(u)) \end{pmatrix}$  という曲線である。この曲線の  $u = u_0$  における接ベクトルは、 $(s_0, t_0)$  における偏微分、 $u_0$  における微分を使って

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{d\sigma}{du} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d\tau}{du} \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{d\sigma}{du} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{d\tau}{du} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{d\sigma}{du} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{d\tau}{du} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\sigma}{du} \\ \frac{d\tau}{du} \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial s} \frac{d\sigma}{du} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \frac{d\tau}{du}$$

と書かれる。従って、接平面は仮定から独立な2つのベクトル

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial s}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s}(s_0, t_0) \\ \frac{\partial \eta}{\partial s}(s_0, t_0) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s_0, t_0) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \text{ を使って、}$$

$$\vec{q}(s_0, t_0) + s \frac{\partial \vec{q}}{\partial s}(s_0, t_0) + t \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}(s_0, t_0)$$

のようにパラメータ表示される。