7 ポアンカレの補題の証明

ポアンカレの補題は、ユークリッド空間の星型の開集合 U 上の閉微分 $p+1$ 形式に対して、d で写ってくる微分 p 形式の存在を主張するものであるから、微分 $p+1$ 形式に対して微分 p 形式を作る操作を考えなければいけない。そのための方法のひとつは、1つの座標についての原始関数を考えることである。

まず、n 次元ユークリッド空間の開集合 U に対し、$n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $[0,1]\times U$ を考える。ここで、座標は $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ で与えられているとする。$p>0$ として、$[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

に対し、

$$I(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0} f_{0i_2\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

とおく。$I(\alpha)$ は $[0,1]\times U$ 上の微分 $p-1$ 形式であり、$i_1=0$ の項だけに対しての和であることに注意する。このとき、$\mathrm{d}\,I(\alpha)+I(\mathrm{d}\,\alpha)=\alpha-\alpha_0$ となる。ただし、$\alpha_0 = \displaystyle\sum_{0<i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ である。実際、$\mathrm{d}\,I(\alpha)$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,I(\alpha) = &\sum_{i_1=0,i_2<\cdots<i_p} f_{i_1i_2\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\end{aligned}$$

一方、$I(\mathrm{d}\,\alpha)$ の計算は、次のようになる。

$$\begin{aligned}I(\mathrm{d}\,\alpha) &= I\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\\ &= I\left(\sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\\ &= \sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\end{aligned}$$

2番目の等号は、I を計算したときに 0 となる $\mathrm{d}x_0$ を含まない項を省いたものである。$\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0 = f_{i_1\cdots i_p}(x_0,x_1,\ldots,x_n)-f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\ldots,x_n)$ であるから、$\mathrm{d}\,I(\alpha)+I(\mathrm{d}\,\alpha)=\alpha-\alpha_0$ となる。

ここで得られた α_0 は、$[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式で、値が x_0 方向に一定のものである。

$\iota_0 : U \longrightarrow [0,1]\times U$, $\pi : [0,1]\times U \longrightarrow U$ を $\iota_0(\boldsymbol{x}) = (0,\boldsymbol{x})$, $\pi(x_0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ で定義すると、$\alpha_0 = \pi^*({\iota_0}^*\alpha)$ と書かれる。例 6.4 参照。従って、次の命題が示された。

命題 7.1 n 次元ユークリッド空間の開集合 U に対し、$n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $[0,1]\times U$ を考える。$[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式 α に対し、次が成立する。

$$\mathrm{d}\,I(\alpha)+I(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha-\pi^*({\iota_0}^*\alpha)$$

注意 7.2　この命題において、$a \in [0,1]$ に対し、

$$I_a(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p} \left(\int_a^{x_0} f_{0 i_2 \cdots i_p} \, \mathrm{d}x_0 \right) \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

とし、$\iota_a(\boldsymbol{x}) = (a, \boldsymbol{x})$ と定義すると、次が得られる。

$$\mathrm{d}(I_a(\alpha)) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$$

ポアンカレの補題 5.11 の証明　$p > 0$ として、$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U 上の微分 p 形式

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

に対し、新しい座標 x_0 を導入し、$[0,1] \times U$ 上の微分 p 形式

$$\begin{aligned}\beta = \sum_{i_1<\cdots<i_p} & f_{i_1 \cdots i_p}(x_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}) \\ & (x_0 \, \mathrm{d}x_{i_1} + (x_{i_1} - y_{i_1}) \, \mathrm{d}x_0) \wedge \cdots \wedge (x_0 \, \mathrm{d}x_{i_p} + (x_{i_p} - y_{i_p}) \, \mathrm{d}x_0)\end{aligned}$$

を考える。これは写像 $\varphi(x_0, \boldsymbol{x}) = x_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}$ により定義される写像 $\varphi : [0,1] \times U \longrightarrow U$ による α の引き戻しである：

$$\beta = \varphi^*\alpha$$

$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ とすると、定理 6.11 により、

$$\mathrm{d}\,\beta = \mathrm{d}(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(\mathrm{d}\,\alpha) = 0$$

である。命題 7.1 により、$\mathrm{d}\,I(\beta) = \beta - \beta_0$ となる。ここで、$p > 0$ だから $\beta_0 = 0$ で、$\mathrm{d}\,I(\beta) = \beta$ となる。ここで $x_0 = 1$ として生き残る成分を見る。すなわち、$\iota_1 : U \longrightarrow [0,1] \times U$ による引き戻しを考えると、

$$\alpha = \iota_1^*\beta = \iota_1^* \, \mathrm{d}(I(\beta)) = \mathrm{d}(\iota_1^* I(\beta))$$

となる。 ■

第１章でユークリッド空間の開集合上で定義された微分形式を、ユークリッド空間内の多様体上では、その制限を考えることができる。ユークリッド空間内の多様体のパラメータ表示に対して、その表示による引き戻しにより、微分形式が表示されていると考えるのは自然である。さらに自然なのは、一般の多様体上に微分形式を定義し、その積分を考察することである。ドラーム理論という美しい理論が構築される。

8　多様体

定義 8.1 (多様体の定義) M が n 次元（微分可能）多様体であるとは，M がハウスドルフ空間であり，次のような開近傍 U_i（の集合）と U_i から n 次元ユークリッド空間の開集合への同相写像 $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \boldsymbol{R}^n$ （の集合）が存在することである．

- $\displaystyle\bigcup_i U_i = M,$
- $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき，

  $$\varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

  が C^∞ 級である．

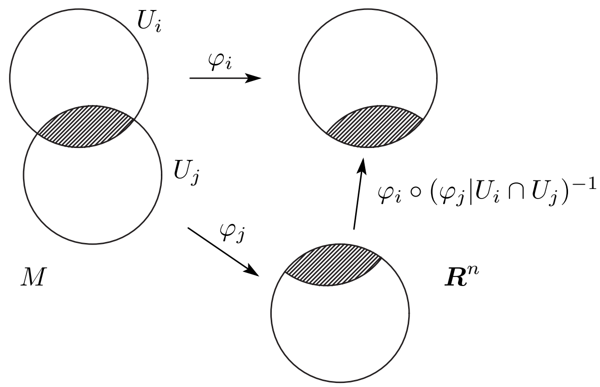

図 2: 多様体の座標変換

(U_i, φ_i) を**局所座標**あるいは**座標近傍**，その集まり $\{(U_i, \varphi_i)\}$ を**局所座標系**あるいは**座標近傍系**，$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j|U_i \cap U_j)^{-1}$ を**座標変換**と呼ぶ．

注意 8.2　本書では，M は上に定義した多様体の上で同値となる次の条件の１つを満たすとする（これはパラコンパクトと呼ばれる性質とも同値となる．パラコンパクトの定義については，[松島] を参照のこと）．

- M は第２可算公理を満たす．すなわち，可算個の開集合があってどのような開集合もその部分族の和集合となる．
- M に対して，稠密な可算集合が存在する（可分である）．
- M は σ コンパクトである．すなわち，M はコンパクト部分集合の可算増大列の和集合である．

多様体の定義の座標近傍を用いて、多様体の間の C^∞ 級写像が定義される。

定義 8.3 (多様体の間の写像) C^r 級多様体 M_1, M_2 を考える．$s \leqq r$ に対し，写像 $F : M_1 \longrightarrow M_2$ が C^s 級であるとは，$F(x) \in M_2$ のまわりの座標近傍 (V, ψ), $F^{-1}(V)$ に含まれる $x \in M_1$ のまわりの座標近傍 (U, φ) に対して，$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ が C^s 級となることである．

特に、$\boldsymbol{R}$ への C^∞ 級写像 $M \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を M 上の C^∞ 級関数と呼ぶ。

多様体上に C^∞ 級関数が沢山存在することは、自明なことではないが、重要な事実である。[多様体入門] では、それを示すときに、次の定理を示した。

定理 8.4 (多様体入門・定理 5.1.3) 多様体 M のコンパクト部分集合 K と K を含む開集合 U が与えられているとする．M 上の C^∞ 級関数 $\nu : M \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で，M 上で $0 \leqq \nu(x) \leqq 1$, $\nu|K = 1$ かつ $\operatorname{supp} \nu$ は U のコンパクト部分集合となるものが存在する．

ここで、C^∞ 級多様体 M 上の関数 f に対し，f の**台** (サポート，support) $\operatorname{supp} f$ は

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

で定義される。

この定理 8.4 は、開被覆に従属する１の分割の存在に一般化される。このことは、後に、チェック・ドラーム複体の議論、向き付けられた多様体上の積分の定義に用いられる。

命題 8.5 (多様体入門・例題 5.3.6) M をコンパクト多様体とする．M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ に対し，C^∞ 級関数 $\lambda_i : M \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で次を満たすものが存在する．$0 \leqq \lambda_i(x) \leqq 1$, $\operatorname{supp} \lambda_i \subset U_i$, 有限個の i を除いて $\lambda_i = 0$, $\displaystyle\sum_i \lambda_i = 1$.

注意 8.6　この命題 8.5 は、一般のパラコンパクト多様体に対して各点の近傍で有限個の i を除いて $\lambda_i = 0$ となるような 1 の分割 λ_i が存在するという形で成立する。

C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 写像 f は、座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ を用いて $f \circ {\varphi_i}^{-1}$ が $\varphi_i(U_i)$ 上の C^∞ 級となるものとして定義されている。このとき、$\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 上の関数 $(f \circ {\varphi_i}^{-1}) \circ \varphi_{ij}$ は、$f \circ {\varphi_j}^{-1} | \varphi_j(U_i \cap U_j)$ と一致している。

$V_i = \varphi_i(U_i)$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ として、$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ とする．各 V_i 上に C^∞ 級関数 $f^{(i)}$ が与えられたとき、$f^{(j)} | V_{ij} = f^{(i)} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ij}^* f^{(i)}$ であれば、M 上の C^∞ 級関数 f が $M \cong \big(\bigsqcup_{i \in I} V_i\big) / \sim$ 上に定まる。ここで、$\sim$ は、直和 $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ 上の

$$V_{ji} \ni \boldsymbol{x}_i \sim \boldsymbol{x}_j \in V_{ij} \iff \boldsymbol{x}_i = \varphi_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$$

で定義される同値関係である（多様体入門・例題 3.5.2 参照)。

これと同じように、C^∞ 級多様体 M 上の微分形式 α を次のように定義できる。

定義 8.7（多様体上の微分形式の定義１） M 上の p 形式 α とは、各 V_i 上の C^∞ 級微分 p 形式 $\alpha^{(i)}$ で次を満たすもののことである。

$$\alpha^{(j)} | V_{ij} = \varphi_{ij}^* \alpha^{(i)}$$

【問題 8.8】　座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ に対し、（これに含まれない）座標近傍 (U_0, φ_0) は、$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I} \cup \{(U_0, \varphi_0)\}$ が再び座標近傍系となるとき、$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ と両立するといわれる。座標近傍 (U_0, φ_0) が $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ と両立するとき、M 上の p 形式 α は、$\varphi_0(U_0) = V_0$ 上の微分 p 形式 $\alpha^{(0)}$ で,

$$\alpha^{(0)} | V_{i0} = \varphi_{i0}^* \alpha^{(i)}$$

を満たすものを定めることを示せ。但し、$i, j \in \{0\} \cup I$ に対し、$V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ である。

【解】　$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ は座標近傍系だから、V_0 は $\{V_{i0}\}_{i \in I}$ で被覆されている。従って V_0 のすべての点で $\alpha^{(0)}$ が定義されているためには $V_{i0} \cap V_{j0}$ 上で $\varphi_{i0}^* \alpha^{(i)}$ と $\varphi_{j0}^* \alpha^{(j)}$ が一致していることがわかればよい。これは、次からわかる。$i, j, k \in \{0\} \cup I$ に対し、$V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、$\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ ことから、特に $k = 0$ として、$V_{i0} \cap V_{j0}$ 上で、$\varphi_{i0} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{j0}$. 一方、$V_{ij}$ では、$\alpha^{(j)} | V_{ij} = \varphi_{ij}^* \alpha^{(i)}$ であるから、$V_{i0} \cap V_{j0}$ 上で、

$$\varphi_{i0}^* \alpha^{(i)} = (\varphi_{ij} \circ \varphi_{j0})^* \alpha^{(i)} = {\varphi_{j0}}^* {\varphi_{ij}}^* \alpha^{(i)} = {\varphi_{j0}}^* \alpha^{(j)}.$$

多様体を考えるときには、与えられた座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ と両立する (U, φ) は、すべて座標近傍と呼ぶ。微分 p 形式 α は、このような任意の座標近傍上で、ユークリッド空間の開集合 $\varphi(U)$ 上の微分 p 形式として表示されている。

9　余接空間

多様体上の微分形式の定義 8.7 は、多様体上で微分形式の計算をするうえでは、実用的なものである。一方、多様体 M 上の対象という位置づけが間接的である。もう少し、概念的な定義を、多様体の接空間を多様体上の曲線の同値類として定義したのと同じように、多様体上の関数の同値類として与えることができる。

n 次元多様体 M の点 x において、M 上の関数 $f_1,\,f_2$ が同値であることを、x のまわりの座標近傍 (U,φ) を用いて、

$$f_1 \sim f_2 \Longleftrightarrow \mathrm{d}(f_1\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))} = \mathrm{d}(f_2\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$$

により定義する。$\mathrm{d}(f_k\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$ $(k=1,\,2)$ は $\varphi(x)$ における全微分の値である。

座標近傍 (U,φ) の代わりに (V,ψ) を用いると、$\mathrm{d}(f_1\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))} = \mathrm{d}(f_2\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$ ならば、$\mathrm{d}(f_1\circ\psi^{-1})_{(\psi(x))} = \mathrm{d}(f_2\circ\psi^{-1})_{(\psi(x))}$ である。実際、$\psi(p)$ の近傍で $f_k\circ\psi^{-1} = f_k\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\psi^{-1})$ $(k=1,\,2)$ だから、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f_1\circ\psi^{-1})_{(\psi(x))} &= \mathrm{d}(f_1\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\psi^{-1}))_{(\psi(x))}\\
&= (\varphi\circ\psi^{-1})^*\,\mathrm{d}(f_1\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}\\
&= (\varphi\circ\psi^{-1})^*\,\mathrm{d}(f_2\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}\\
&= \mathrm{d}(f_2\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\psi^{-1}))_{(\psi(x))} = \mathrm{d}(f_2\circ\psi^{-1})_{(\psi(x))}
\end{aligned}$$

ここで、ここで、３番目と５番目の等号は、命題 6.2 （16 ページ）による。全微分 $\mathrm{d}(f_k\circ\psi^{-1})$ の $\psi(x)$ における値が、全微分 $\mathrm{d}(f_k\circ\varphi^{-1})$ の $\varphi(x)$ における値で定まることが重要である。

定義 9.1 (余接空間) 同値類 $C^\infty(M)/\sim$ を T^*_xM と書き、x における M の余接空間と呼ぶ。

【問題 9.2】 n 次元多様体 M の点 x における余接空間 T^*_xM は $C^\infty(M)$ の実ベクトル空間の構造から定まる n 次元ベクトル空間の構造を持つことを示せ。

【解】 点 x のまわりの座標近傍 $(U,\varphi=(x_1,\dots,x_n))$ をとることにより、$\mathrm{d}(f\circ\varphi)_{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(x))(\mathrm{d}x_i)_{\varphi(x)}$ と書かれる。$[f]\in C^\infty(M)/\sim$ に対し、$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(x)),\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(x))\right)\in \boldsymbol{R}^n$ を対応させる対応を考える。$f_1,\,f_2\in C^\infty(M)$, $a_1,\,a_2\in\boldsymbol{R}$ に対し、第 i 成分について

$$\frac{\partial(a_1f_1+a_2f_2)}{\partial x_i}(\varphi(x)) = a_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\varphi(x)) + a_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

だから、この対応はベクトル空間の準同型である。同値類の定義から、この対応は、単射である。全射であることも容易に示される。$\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対し、U 上の関数 $f_{\boldsymbol{a}} = \sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ をとる。x の近傍で 1 であり、U に台を持つ関数 ν をとり、$\nu f_{\boldsymbol{a}}$ を考えると U の補集合上では 0 であるように拡張して M 上の関数と考えることができる。$\mathrm{d}(\nu f_{\boldsymbol{a}})_{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{n}a_i(\mathrm{d}x_i)_{\varphi(x)}$ であり、上の対応が全射であることがわかる。

点 x のまわりの座標近傍 $(U,\varphi=(x_1,\dots,x_n))$, に対し、$T^*_xM$ の基底を単に $\mathrm{d}x_1,\,\dots,\,\mathrm{d}x_n$ (または点 x を明示して $(\mathrm{d}x_1)_x,\,\dots,\,(\mathrm{d}x_n)_x$) と書く。点 x のまわりの座標近傍 $(V,\psi=(y_1,\dots,y_n))$ に対し、T^*_xM の基底 $\mathrm{d}x_1,\,\dots,\,\mathrm{d}x_n$ と $\mathrm{d}y_1,\,\dots,\,\mathrm{d}y_n$ の間には次の関係がある。

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{(\varphi(x))}\mathrm{d}x_j$$

これは座標変換したときの微分１形式の引き戻しの式

$$(\varphi\circ\psi^{-1})^*(\mathrm{d}y_i)_{\psi(x)} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{(\varphi(x))}(\mathrm{d}x_j)_{\varphi(x)}$$

と同じものである。

M の各点 x に余接空間 T_x^*M の元を各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ 上で $\mathrm{d}x_i$ の係数が C^∞ 級関数となるように対応させる対応を、M 上の C^∞ 級微分１形式と呼ぶ。

M 上の C^∞ 級関数 f に対して, 各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ 上で $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$ を対応させると、これは、C^∞ 級微分１形式であり、f の全微分と呼ぶ。

【問題 9.3】 $F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする。N 上の C^∞ 級写像 f に対し、$F^*f = f \circ F$ を対応させる写像は準同型写像 $F^* : T_{F(x)}^*N \longrightarrow T_x^*M$ を引き起こすことを示せ。

【解】 $F(x) \in N$ のまわりの座標近傍 (V, ψ) に対して, $\mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))} = \mathrm{d}(f_2 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))}$ とする。$x \in M$ のまわりの座標近傍 (U, φ) で $F(U) \subset V$ となるものをとる。このとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f_1 \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} &= \mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x)} \\
&= (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* \,\mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))} \\
&= (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* \,\mathrm{d}(f_2 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))} \\
&= \mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x)} = \mathrm{d}(f_1 \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}
\end{aligned}$$

ここで、３番目と５番目の等号は、命題 6.2 （16 ページ）による。

10　p 次外積の空間

微分１形式の点 x における値は、余接空間 T_x^*M であったが、微分 p 形式の値は、その p 次外積の空間にある。定義 5.1 （11 ページ）と同様に次の定義をする。

定義 10.1 (p 次外積の空間) $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ を基底とする余接空間 T_x^*M の p 次外積の空間とは、$1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq n$ となる自然数 $i_1, \ldots, i_p$ に対応した $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ という全部で $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ 個の記号を基底とするベクトル空間であり、$\bigwedge^p T_x^*M$ と書かれる。

【例 10.2】 ４次元多様体の２次外積の空間 $\bigwedge^2 T_x^*M$ は、T_x^*M の基底を $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_4$ とすると、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_4$, $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4$, $\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ を基底とする６次元ベクトル空間である。

余接空間 T_x^*M の基底を $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n$ に取り替えたとき、$\mathrm{d}x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j$ とすると、

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_p}}{\partial y_{j_p}}\,\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p}$$

と変換される。ここで、$j_1, \ldots, j_p$ のなかに同じものがあれば

$$\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p} = 0$$

とし、これらがすべて異なり、これを並べ替えたものを $k_1, \ldots, k_p$ $(k_1 < \cdots < k_p)$ とするとき、$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ k_1 \cdots k_p \end{pmatrix}$ を置換の符号として、

$$\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ k_1 \cdots k_p \end{pmatrix} \mathrm{d}y_{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{k_p}$$

とする。

注意 10.3　$\bigwedge^p T_x^*M$ の座標変換は、すぐ後で定義する外積と両立するように定義されている。

定義 10.4（多様体上の微分形式の定義２） M の各点 x に余接空間 T_x^*M の p 次外積の空間 $\bigwedge^p T_x^*M$ の元を各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ 上で $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ の係数 $f_{i_1 \cdots i_p}$ が C^∞ 級関数となるように対応させる対応を、M 上の C^∞ 級微分 p 形式と呼ぶ。M 上の C^∞ 級微分 p 形式のなす（無限次元）ベクトル空間を $\Omega^p(M)$ と書く。

この定義は p 次外積の空間 $\bigwedge^p T_x^*M$ を使っているが、実際の計算では定義 8.7 と同じものになっていることは明らかであろう。

【例 10.5】　n 次元トーラス T^n は、以下のように定義される。n 次元ユークリッド $\boldsymbol{R}^n$ 上の、整数ベクトル全体のなす群 $\boldsymbol{Z}^n$ の平行移動による作用を考える。$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^n$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$ とする。この作用の軌道を同値類と考える同値関係を考え、その同値類の集合を $T^n = \boldsymbol{R}^n / \boldsymbol{Z}^n$ と書く。$\pi : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow T^n$ を射影として、π が単射となるような $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U について、$(\pi(U), (\pi|U)^{-1})$ を集めたものを座標近傍系として、n 次元 C^∞ 級多様体の構造が得られる。

T^n の微分 p 形式 α は、$\boldsymbol{R}^n$ の座標を使って、座標近傍 $(\pi(U), (\pi|U)^{-1})$ 上で、$\displaystyle\sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_1}$ と書かれる。このような、書き方は２つの座標近傍 $(\pi(U), (\pi|U)^{-1})$, $(\pi(V), (\pi|V)^{-1})$ の共通部分上で一致しており、α は $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、定義される $f_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{x})$ により、上の式で表されている。ただし、$f_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{x})$ は、$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^n$ に対し、$f_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = f_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{x})$ を満たす。$\boldsymbol{R}^n$ の言葉で言うと、T^n の微分 p 形式 α は, $\boldsymbol{R}^n$ 上の $\boldsymbol{Z}^n$ 周期的な微分 p 形式により定義されている。

定数を係数とする $\boldsymbol{R}^n$ 上の微分 p 形式 $\displaystyle\sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_1}$ は、$\boldsymbol{Z}^n$ 周期的であるから、$T^n = \boldsymbol{R}^n / \boldsymbol{Z}^n$ 上の微分 p 形式を定める。

C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ は、例題 9.3 により、線形写像 $F^* : T_{F(x)}^*N \longrightarrow T_xM$ を引き起こし、これは、線形写像 $F^* : \bigwedge^p T_{F(x)}^*N \longrightarrow \bigwedge^p T_xM$ を引き起こす。これは、$F(x)$ のまわりの座標近傍を $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ とするとき、

$$\begin{aligned} F^*((\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_{i_p})_{F(x)}) &= F^*(\mathrm{d}y_{i_1})_{F(x)} \wedge \dots \wedge F^*(\mathrm{d}y_{i_p})_{F(x)} \\ &= \mathrm{d}(y_{i_1} \circ F)_x \wedge \dots \wedge \mathrm{d}(y_{i_p} \circ F)_x \end{aligned}$$

として計算されるものである。

これにより引き戻し $F^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$ が定義される。具体的に書くと、次のようになる。

命題 10.6 $F : M \longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。$F(x) \in N$ のまわりの座標近傍を $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ とし、$x \in M$ のまわりの座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ を $F(U) \subset V$ となるようにとる。N 上の微分 p 形式 α が、$F(x)$ のまわりで、$\displaystyle\sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p}\, \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_{i_p}$

と表示されるとき、$F^*\alpha$ は x のまわりで

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\circ F\,\mathrm{d}(y_{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(y_{i_p}\circ F)\\ =&\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1=1}^{m}\cdots\sum_{j_p=1}^{m} f_{i_1\cdots i_p}\circ F\frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}}\cdots\frac{\partial y_{i_p}}{\partial x_{j_p}}\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}\end{aligned}$$

と表示される。

また、例題 6.9 （19 ページ) から、多様体の間の C^∞ 級写像 $G: L \longrightarrow M$, $F: M \longrightarrow N$ に対して次の命題が成り立つ。

命題 10.7 多様体の間の C^∞ 級写像 $G: L \longrightarrow M,\ F: M \longrightarrow N$ に対し、引き戻し $G^*: \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(L),\ F^*: \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M),\ (F\circ G)^*: \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(L)$ は $(F\circ G)^* = G^*F^*$ を満たす。

【例 10.8】 (1) ユークリッド空間内の多様体 $M^m \subset \boldsymbol{R}^n$ は、陰関数表示、グラフ表示、パラメータ表示等で与えられる [多様体入門定理 2.2.1 参照]。$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U で、M を含むものをとると、包含写像 $\iota: M \longrightarrow U$ により、U 上の微分形式は、M^m 上の微分形式に引き戻される。（M^m の法束の 0 切断の近傍から M の近傍への微分同相写像があるから、M^m 上のすべての微分形式はある近傍の微分形式の制限である。[多様体入門問題 5.2.5 参照]）

(2) 例 10.5 において、n 次元トーラス $T^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ 上の微分 p 形式 α の $\pi: \boldsymbol{R}^n \longrightarrow T^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ による引き戻し $\pi^*\alpha$ が、α を $\boldsymbol{R}^n$ 上で表示する $\boldsymbol{Z}^n$ 周期的微分 p 形式である。

微分形式の外積は、p 次外積の空間と q 次外積の空間の元に対し $p+q$ 次外積の空間の元を与える対応から得られている。

定義 10.9 (外積) 外積 $\wedge: \bigwedge^p T_x^*M \times \bigwedge^q T_x^*M \longrightarrow \bigwedge^{p+q} T_x^*M$ は基底 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},\ \mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ に対し、$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ を対応させることで定義される準同形である。ただし、$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ は定義 *5.2*（*12* ページ）と同じ規則で計算される。

このような準同型から自然に M 上の C^∞ 級微分形式の空間に外積

$$\wedge: \Omega^p(M)\times\Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$$

が導かれる。これは定義 8.7 と、問題 6.8（18 ページ）からも納得されるであろう。また、例題 5.4（12 ページ）により、次の命題が成立する。

命題 10.10 M 上の微分 p 形式 α、微分 q 形式 β に対して

$$\beta\wedge\alpha = (-1)^{pq}\alpha\wedge\beta$$

となる。

問題 6.8（18 ページ）から引き戻しに関して次も成立する。

命題 10.11 $F: M \longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。N 上の微分 p 形式 α、微分 q 形式 β に対して

$$F^*(\alpha\wedge\beta) = F^*\alpha\wedge F^*\beta$$

となる。

11　外微分とドラームコホモロジー

多様体上の微分形式の外微分は、定義 8.7 と、定理 6.11（20 ページ）により定義されると考えるのが最もやさしい。

定義 11.1 M 上の微分 p 形式 α の外微分 $\mathrm{d}\,\alpha$ は、座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ に対して、$\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ と表されるとき、

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}\right) = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \mathrm{d}\,f_{i_1\cdots i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

と表される微分 $p+1$ 形式である。

これにより

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

という準同型の列が定義されるが、定理 5.10 により、すぐに次が示される。

定理 11.2 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+2}(M)$ は 0 準同型である。

ベクトル空間の準同型写像の列

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

について、$\mathrm{d}\circ\mathrm{d}$ が満たされているとき、コホモロジー群を取ることができる。

$$H^p_{DR}(M) = \ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)) / \operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$$

を多様体 M の p 次ドラーム・コホモロジー群と呼ぶ。$\ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))$ の元を閉 p 形式 (closed p-form)、$\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$ の元を完全 p 形式 (exact p-form) と呼ぶ。閉 p 形式 α が代表するドラーム・コホモロジー群 $H^p_{DR}(M)$ の元 $[\alpha]$ は α のコホモロジー類と呼ばれる。

【例 11.3】　(1) 閉 0 形式 f は、局所定数関数である。従って、$H^0_{DR}(M)$ は M の連結成分で定数となる関数全体のなすベクトル空間である。

(2) ポアンカレの補題 5.11 （15 ページ）により、$\boldsymbol{R}^n$ の星型の開集合 U に対しては、$p=0$ に対して、$H^0_{DR}(U) \cong \boldsymbol{R}$, $p>0$ に対して、$H^p_{DR}(U) = 0$ である。

【例 11.4】　円周は例 10.5 で述べたトーラスの 1 次元の場合で、$S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と定義される。$\Omega^1(S^1)$ の元は $\boldsymbol{R}$ 上の $\boldsymbol{Z}$ 周期関数 $f(x)$ により、$f(x)\,\mathrm{d}x$ と書かれる。$\Omega^1(S^1)$ の元はすべて閉形式であるが、完全形式であるためには、$f(x) = \dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,x}$ となる $\boldsymbol{R}$ 上の $\boldsymbol{Z}$ 周期関数 $F(x)$ が存在しなければならない。微積分学の基本定理から、$F(x+1) - F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$ だから、$\displaystyle\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t = 0$ がすべての x に対して成立することが必要十分である。この積分は、f は $\boldsymbol{Z}$ 周期関数だから x の値によらない。従って $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ が必要十分である。よって、$H^1_{DR}(S^1) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が、$[\alpha] \in H^1_{DR}(S^1)$ に対して、$\displaystyle\int_0^1 \alpha$ により定まり、これが同型写像になる。従って $H^1_{DR}(S^1) \cong \boldsymbol{R}$ である。

【例 11.5】　例 10.5 で述べた n 次元トーラス T^n 上の定数係数 p 形式 $\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_1}$ は閉 p 形式である。0 でない定数係数 p 形式は完全形式ではないこ

とを後に示す。

【問題 11.6】　2 次元トーラス T^2 上の微分形式は、例 10.5 で見たように、$\boldsymbol{R}^2$ 上の周期関数を係数とする微分形式で表される。周期関数のフーリエ展開を用いて、$H^*_{DR}(T^2)$ を計算せよ。

【解】　2 次元トーラス T^2 は連結だから $H^0_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$ である。
2 次元トーラス T^2 上の微分 1 形式 $\alpha = g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2$ に対し、g_1, g_2 がフーリエ級数で与えられていると考えると、$g_1 = \sum a_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$, $g_2 = \sum b_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$ と表される。C^∞ 級であることと任意の $r>0$ に対して、$\sum({n_1}^2+{n_2}^2)^{r/2}|a_{n_1n_2}| < \infty$, $\sum({n_1}^2+{n_2}^2)^{r/2}|b_{n_1n_2}| < \infty$ が同値である。g_1, g_2 が実数値であることは、$a_{(-n_1)(-n_2)} = \overline{a_{n_1n_2}}$, $b_{(-n_1)(-n_2)} = \overline{b_{n_1n_2}}$ と同値である。

$$\mathrm{d}\,\alpha = 2\pi\sqrt{-1}\sum(n_1b_{n_1n_2} - n_2a_{n_1n_2})e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$$

であるから、α が閉形式であること、すなわち $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ は $n_1b_{n_1n_2} - n_2a_{n_1n_2} = 0$ と同値である。この式により、$n_1 \neq 0$ ならば $b_{n_10} = 0$, $n_2 \neq 0$ ならば $a_{0n_2} = 0$ となっていることに注意する。
このとき、$\alpha = \mathrm{d}\,f$ となるかどうかを、$f = \sum c_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$ と置いて計算する。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,f = 2\pi\sqrt{-1}\Big(&\sum n_1c_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\\ &+\sum n_2c_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}\,\mathrm{d}x_2\Big)\end{aligned}$$

であるから、$\alpha = \mathrm{d}\,f$ となるための条件は

$$a_{n_1n_2} = 2\pi\sqrt{-1}n_1c_{n_1n_2},\quad b_{n_1n_2} = 2\pi\sqrt{-1}n_2c_{n_1n_2}$$

である。α が閉形式である条件から $n_1 \neq 0$ ならば $b_{n_10} = 0$, $n_2 \neq 0$ ならば $a_{0n_2} = 0$ であったが、$b_{00} = 0$, $a_{00} = 0$ も必要である。そこで、n_1 も n_2 も 0 でなければ、$c_{n_1n_2} = \dfrac{a_{n_1n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_1} = \dfrac{b_{n_1n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_2}$ と置くと条件が満たされる。さらに、$n_1 \neq 0$ ならば $c_{n_10} = \dfrac{a_{n_10}}{2\pi\sqrt{-1}n_1}$, $n_2 \neq 0$ ならば $c_{0n_2} = \dfrac{b_{0n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_2}$ と置くと、$c_{n_1n_2}$ は (c_{00}) を除いて定まる。$c_{00} = 0$ として $\alpha = \mathrm{d}\,f$ が成立する。
従って、$H^1_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}^2$ で、この同型は $\alpha = g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2$ に対して、g_1, g_2 のフーリエ展開の定数項を対応させることにより得られる。
さて、微分 2 形式 $\beta = h\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ に対して、$h = \sum e_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$ と置いて計算する。$\beta = \mathrm{d}\,\alpha$ となるためには、

$$e_{n_1n_2} = 2\pi\sqrt{-1}(n_1b_{n_1n_2} - n_2a_{n_1n_2})$$

を満たすように $a_{n_1n_2}$, $b_{n_1n_2}$ を定めればよい。このためには $e_{00} = 0$ でなければならない。$n_1 \neq 0$ に対して、$a_{n_1n_2} = 0$, $b_{n_1n_2} = \dfrac{e_{n_1n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_1}$, $n_2 \neq 0$ に対して、$a_{0n_2} = \dfrac{e_{n_10}}{2\pi\sqrt{-1}n_2}$, $b_{0n_2} = 0$ とおくと、e_{00} 以外の係数を合わせることができる。
$H^2_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$ で、この同型は $\beta = h\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ に対して、h のフーリエ展開の定数項を対応させることにより得られる。

後で、コンパクトな多様体に対して、各次数のドラームコホモロジー群は有限次元ベクトル空間となることを示すが、これを説明するためには、ドラームコホモロジー群の性質を示すことが必要である。

$F : M \longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。引き戻し $F^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$ が定義されているから、次の図式が得られている。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots\xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{p+1}(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots \\
& \uparrow F^* & & \uparrow F^* & & \uparrow F^* & & \uparrow F^* & \\
0 \longrightarrow & \Omega^0(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots\xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{p+1}(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots
\end{array}$$

命題 10.6 による引き戻しの様子をみると、定理 6.11（20 ページ）から、上の図式は可換であることがわかる。

命題 11.7 $F^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}\,F^*$.

閉 p 形式 $\alpha \in \Omega^p(N)$ に対して、$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ だから、$0 = F^*\,\mathrm{d}\,\alpha = \mathrm{d}\,F^*\alpha$ であり、$F^*\alpha$ も閉 p 形式であることがわかる。また、完全 p 形式 α は、$\beta \in \Omega^p(N)$ の元により $\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ と書かれているが、$F^*\alpha = F^*\,\mathrm{d}\,\beta = \mathrm{d}\,F^*\beta$ となるから、$F^*\alpha$ も閉 p 形式となる。従って、

$$\begin{aligned}F^* :& \ker(\mathrm{d} : \Omega^p(N) \to \Omega^{p+1}(N))/\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(N) \to \Omega^p(N))\\ &\longrightarrow \ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))/\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))\end{aligned}$$

すなわち、$F^* : H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ が準同型として定義される。

定理 11.8 C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ は、準同型写像 $F^* : H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ を引き起こす。

この準同型写像はベクトル空間の準同型というだけでなく、外積代数の準同型である。

まず、例題 5.7（13 ページ）から、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 11.9 多様体 M 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ が成立する。

従って、閉 p 形式と閉 q 形式の外積は、閉 $p+q$ 形式である。

閉 p 形式 α, 閉 q 形式 β のドラーム・コホモロジー類を $[\alpha]$, $[\beta]$ とするとき、$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ と定義することができる。すなわち、α, β と同じコホモロジー類をあたえる閉 p 形式、閉 q 形式は、$p-1$ 形式 η, $q-1$ 形式 ζ により、$\alpha + \mathrm{d}\,\eta$, $\beta + \mathrm{d}\,\zeta$ で与えられる。このとき、

$$\begin{aligned}&(\alpha + \mathrm{d}\,\eta) \wedge (\beta + \mathrm{d}\,\zeta)\\ &= \alpha \wedge \beta + (\mathrm{d}\,\eta) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathrm{d}\,\zeta) + \mathrm{d}\,\eta \wedge \mathrm{d}\,\zeta\\ &= \alpha \wedge \beta + \mathrm{d}(\eta \wedge \beta) + (-1)^p\,\mathrm{d}(\alpha \wedge \zeta) + \mathrm{d}(\eta \wedge \mathrm{d}\,\zeta)\\ &= \alpha \wedge \beta + \mathrm{d}(\eta \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \zeta + \eta \wedge \mathrm{d}\,\zeta)\end{aligned}$$

さらに、命題 10.11 により、$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ となるから、次が成立する。

命題 11.10 多様体上の微分形式の空間における外積 $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$ は多様体のドラーム・コホモロジー群 $H^*_{DR}(M)$ 上に外積 $\wedge : H^p_{DR}(M) \times H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M)$ を定義する。多様体の間の C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ に対し、$F^*([\alpha] \wedge [\beta]) = F^*[\alpha] \wedge F^*[\beta]$ が成立する。すなわち、F^* は外積代数の準同型である。

さて、次に $[0,1] \times M$ と M のドラームコホモロジー群は同型であることを示す。

命題 7.1 とその後の注意 7.2（22 ページ）によれば、ユークリッド空間の開集合 U に対して、$I_a : \Omega^p([0,1]\times U) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times U)$ で、$\mathrm{d}\,I_a(\alpha) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ を満たすものが次で定義されている。

$$I_a(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p} \left(\int_a^{x_0} f_{0 i_2 \cdots i_p}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_0 \right) \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

多様体 M の座標近傍 (U, φ) に対し、$I_a^{(U)} : \Omega^p([0,1]\times\varphi(U)) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times\varphi(U))$ を上と同じ式で定義する。

命題 11.11 $I_a^{(U)}$ は $I_a: \Omega^p([0,1]\times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times M)$ を定義する。この I_a は $\mathrm{d}\, I_a(\alpha) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ を満たす。

証明 M の座標近傍 (U,φ), (V,ψ) に対し、$\alpha \in \Omega^p([0,1]\times M)$ の $[0,1]\times\varphi(U)$ における表示 $\alpha^{(U)}$ の $\mathrm{d}x_0$ を含む成分 $\displaystyle\sum_{0<i_2<\cdots<i_p} f_{0i_2\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ は $\mathrm{id}\times(\varphi\circ\psi^{-1}) : [0,1]\times\psi(U\cap V) \longrightarrow [0,1]\times\varphi(U\cap V)$ で引き戻すと、α の $[0,1]\times\psi(V)$ における表示 $\alpha^{(V)}$ の $\mathrm{d}x_0$ を含む成分 $\displaystyle\sum_{0<j_2<\cdots<j_p} g_{0j_2\cdots j_p}\,\mathrm{d}x_0\wedge \mathrm{d}y_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{j_p}$ に、$[0,1]\times\psi(U\cap V)$ 上で一致する。$\alpha^{(V)} = (\mathrm{id}\times(\varphi\circ\psi^{-1}))^*\alpha^{(U)}$ だからである。従って、

$$(\mathrm{id}\times(\varphi\circ\psi^{-1}))^* I_a^{(U)}\alpha^{(U)} = I_a^{(V)}\alpha^{(V)}$$

が成立している。

定義 8.7 により、$I_a: \Omega^p([0,1]\times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times M)$ が定義される。この I_a が $\mathrm{d}\, I_a(\alpha) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ を満たすことは、命題 7.1 とその後の注意 7.2 （22 ページ）によりわかる。 ■

定理 11.12 $\pi : [0,1]\times M \longrightarrow M$ および $\iota_a : M \longrightarrow [0,1]\times M$ がドラーム・コホモロジー群に誘導する写像 $\pi^* : H^p_{DR}(M) \longrightarrow H^p_{DR}([0,1]\times M)$, ${\iota_a}^* : H^p_{DR}([0,1]\times M) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ は同型写像である。${\iota_a}^*\circ\pi^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}(M)}$, $\pi^*{\iota_a}^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}([0,1]\times M)}$ であり、従って、${\iota_0}^* = (\pi^*)^{-1} = {\iota_1}^*$ である。

証明 $\pi\circ\iota = \mathrm{id}_M$ であるから、命題 10.7 により、$\iota^*\circ\pi^* = {\mathrm{id}_M}^*$ であり、${\mathrm{id}_M}^*$ は $H^p_{DR}(M)$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{H^p_{DR}(M)}$ に一致する。

$(\iota_a\circ\pi)^* = \pi^*{\iota_a}^*$ に対して、命題 11.11 により、$p > 0$ に対して、$I_a : \Omega^p([0,1]\times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times M)$ で、$\mathrm{d}\, I_a(\alpha) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ ものがある。このとき、α を $[0,1]\times M$ 上の閉 p 形式 $(p>0)$ とすると、$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ だから、$\mathrm{d}\, I_a(\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$, コホモロジー類について $[\alpha] - [\pi^*({\iota_a}^*\alpha)] = 0$ となる。従って、$\pi^*{\iota_a}^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}([0,1]\times M)}$ となる。$p=0$ のとき、$[0,1]\times M$ 上の閉 0 形式 α は、局所定数関数であり、$\pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ と一致する。 ■

定義 11.13 2 つの C^∞ 級写像 φ_0, $\varphi_1 : M \longrightarrow N$ が、C^∞ ホモトピックであるとは、C^∞ 級写像 $\varphi : [0,1]\times M \longrightarrow N$ で、$\varphi_0 = \varphi(0,\cdot)$, $\varphi_1 = \varphi(1,\cdot)$ となるものが存在することである。

命題 11.14 φ_0, $\varphi_1 : M \longrightarrow N$ が、C^∞ ホモトピックのとき、${\varphi_0}^* = {\varphi_1}^*$ である.

証明 $\varphi_0 = \varphi\circ\iota_0$, $\varphi_1 = \varphi\circ\iota_1$ である。${\iota_0}^* = \iota_1^* : H^p_{DR}([0,1]\times M) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ だから、${\varphi_0}^* = {\iota_0}^*\varphi^* = {\iota_1}^*\varphi^* = {\varphi_1}^*$. ■

【問題 11.15】 多様体 M とユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の直積 $\boldsymbol{R}^m\times M$ に対し、$H^p_{DR}(\boldsymbol{R}^m\times M) \cong H^p_{DR}(M)$ である。

【解】 $\pi : \boldsymbol{R}^m\times M \longrightarrow M$ を $\pi(\boldsymbol{x}, y) = y$ で定義される射影、$\iota : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^m\times M$ を $\iota(y) = (0, y)$ で定義される埋め込みとする。

$\pi\circ\iota = \mathrm{id}_M$ だから、$(\pi\circ\iota)^* = \iota^*\pi^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}(M)}$ である。

$\varphi : [0,1]\times\boldsymbol{R}^m\times M \longrightarrow \boldsymbol{R}^m\times M$ を $\varphi(t,\boldsymbol{x},y) = (t\boldsymbol{x}, y)$ で定義すると、これは、$\varphi_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}^m\times M}$, $\varphi_0 = \iota\circ\pi$ の間のホモトピーを与える。従って、$(\iota\circ\pi)^* = {\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}^m\times M}}^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}(\boldsymbol{R}^m\times M)}$ である。$(\iota\circ\pi)^* = \pi^*\iota^*$ だから、π^*, ι^* は同型写像である。