２００６年度 幾何学 III　　演習問題　　１１月２８日

定義 [チェック・ドラーム複体]　$\{U_i\}_{i=1,\dots,N}$ をコンパクト n 次元多様体 M の開被覆とする。$1 \leqq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqq N$ に対し、$U_{i_0 i_1 \cdots i_k} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ とおいて、次の可換図式をチェック・ドラーム複体と呼ぶ。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^3(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^3(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^3(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^3(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^2(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^2(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^2(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^1(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^1(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^1(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^0(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^0(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^0(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & \\
 & & & \bigoplus_i \mathbf{R}(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \mathbf{R}(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \mathbf{R}(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

ここで、縦向きの準同型について $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U_{i_0\cdots i_k})$ は外微分 d である。また、$\bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \mathbf{R}(U_{i_0\cdots i_k})$ は $\{(U_{i_0\cdots i_k})\}_{i_0<\cdots<i_k}$ を基底とする実ベクトル空間で、$\mathbf{R}(U_{i_0\cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^0(U_{i_0\cdots i_k})$ は定数関数の埋め込み ι である。また、横向きの準同型については、$\Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(U_i)$ は制限 r_i であり、$r = \oplus r_i$ と定義される。また、$k+1$ 個の添え字 $i_0 < \cdots < i_k$ とそれに現れる i_s に対し、$\Omega^p(U_{i_0\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ は制限 $r^{i_0\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_k}_{i_0\cdots i_k}$ の $(-1)^s$ 倍であり、$\delta = \oplus \sum (-1)^s r^{i_0\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_k}_{i_0\cdots i_k}$ と定義される。

通常、条件 "任意の $U_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ は $\mathbf{R}^n$ または空集合と微分同相となる" を満たすとする。このとき、ポアンカレの補題により、縦向きの列は完全列である。

問題１． p を固定する。$f^{(k)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ に対し、$f^{(k)}$ の $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ 成分を $f^{(k)}|U_{i_0\cdots i_k}$ あるいは $f^{(k)}_{i_0\cdots i_k}$ と書く。

(1) $(\delta f^{(k)})|U_{i_0\cdots i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j f^{(k)}_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+1}}|U_{i_0\cdots i_{k+1}}$ を示せ。

(2) $\delta\circ\delta = 0$ を示せ。

問題２． 開被覆 $\{U_i\}_{1=1,\cdots N}$ に従属する 1 の分割を $\{\lambda_i\}$ とする ($\mathrm{supp}\lambda_i \subset U_i$)。$f^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{k+1}} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_{k+1}})$ に対して、$Sf^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ を $(Sf^{(k+1)})|U_{i_0\cdots i_k} = \sum_m \lambda_m f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k}$ と定義する。ただし、m が $i_0, \ldots, i_k$ のどれかと一致するときは $f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k} = 0$ とし、$i_{j-1} < m < i_j$ のとき、$f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k} = (-1)^j f^{(k+1)}_{i_0\cdots i_{j-1}mi_j\cdots i_k}$ とする。また、$\lambda_m f_{mi_0\cdots i_k}$ は $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ の元と考える。

(1) $\delta(Sf^{(k)}) + S(\delta f^{(k)}) = f^{(k)}$ を示せ。（例えば、$k = 2$ に対して示せ。）

(2) (1) を用いてチェック・ドラーム複体の $0 \longrightarrow \Omega^p(M)$ から始まる横の列は完全列であることを示せ。

以後、条件 “任意の $U_{i_0i_1\cdots i_k}$ は $\mathbf{R}^n$ または空集合と微分同相となる” を満たすとする。このとき、ポアンカレの補題により、縦向きの列は完全列である。

問題３． コンパクト多様体 M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\ldots,N}$ が、“任意の $U_{i_0i_1\cdots i_k}$ は $\mathbf{R}^n$ または空集合と微分同相” という条件を満たすとき、チェック複体

$$\bigoplus_i \mathbf{R}(U_i) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0<i_1} \mathbf{R}(U_{i_0i_1}) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \mathbf{R}(U_{i_0i_1i_2}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

の p 次コホモロジー $\check{H}^p(M,\mathcal{U})$ は、p 次ドラーム・コホモロジーと同型であることを示せ。($p = 0, 1, 2, 3$ に対して示せ。)