

定義 [多様体上の微分  $p$  形式]  $M$  上の  $p$  形式  $\alpha$  とは、 $\{(U_i, \varphi_i)\}$  を座標近傍系としたとき、各  $\varphi(U_i)$  上の  $C^\infty$  級微分  $p$  形式  $\alpha^{(i)}$  で次を満たす物のことである。ここで、 $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  である。

$$\alpha^{(j)}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} = \varphi_{ij}^* \alpha^{(i)}$$

定義 [多様体上の微分  $p$  形式]  $M$  の各点  $x$  に余接空間  $T_x^*M$  の  $p$  次外積の空間  $\bigwedge^p T_x^*M$  の元を各座標近傍  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  上で  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  の係数  $f_{i_1 \dots i_p}$  が  $C^\infty$  級関数となるように対応させる対応を、 $M$  上の  $C^\infty$  級微分  $p$  形式と呼ぶ。

定義 [ドラム・コホモロジー]

$$H_{DR}^p(M) = \ker(d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)) / \text{im}(d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M))$$

$\ker(d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M))$  の元を閉  $p$  形式、 $\text{im}(d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M))$  の元を完全  $p$  形式と呼ぶ。

問題 1 .  $F : M \rightarrow N$  を  $m$  次元多様体  $M$  から  $n$  次元多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像とする。引き戻し  $F^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$  は、準同型写像  $F^* : H_{DR}^p(N) \rightarrow H_{DR}^p(M)$  を引き起こすことを示せ。

問題 2 .

- (1) 多様体  $M$  上の閉  $p$  形式と閉  $q$  形式の外積は、閉  $p+q$  形式であることを示せ。
- (2) 外積  $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{p+q}(M)$  はドラム・コホモロジー群の上の外積  $\wedge : H_{DR}^p(M) \times H_{DR}^q(M) \rightarrow H_{DR}^{p+q}(M)$  を引き起こすことを示せ。

問題 3 . 多様体  $M$  に対し、 $[0, 1] \times M$  上の微分形式を考える。座標近傍  $(U, \varphi)$  に対し、 $I_a^{(U)} : \Omega^p([0, 1] \times \varphi(U)) \rightarrow \Omega^{p-1}([0, 1] \times \varphi(U))$  を 11月1日の演習問題と同様に定義する。 $I_a^{(U)}$  は  $I_a : \Omega^p([0, 1] \times M) \rightarrow \Omega^{p-1}([0, 1] \times M)$  を定義することを示せ。 すなわち、得られる  $[0, 1] \times M$  上の  $p-1$  形式の表示が座標近傍を取り替えと矛盾しないことを示せ。

この結果、10月31日の問題2により、この  $I_a$  は  $dI_a(\alpha) + I_a(d\alpha) = \alpha - \pi^*(\iota_a^* \alpha)$  を満たす。ただし、写像  $\pi : [0, 1] \times M \rightarrow M$  は  $\pi(x_0, x) = x$  で定義し、 $a \in [0, 1]$  に対し、写像  $\iota_a : M \rightarrow [0, 1] \times M$  は  $\iota_a(x) = (a, x)$  と定義する。

問題 4 .  $\pi : [0, 1] \times M \rightarrow M$  および  $\iota_a : M \rightarrow [0, 1] \times M$  がドラム・コホモロジー群に誘導する写像

$$\pi^* : H_{DR}^p(M) \rightarrow H_{DR}^p([0, 1] \times M), \quad \iota_a^* : H_{DR}^p([0, 1] \times M) \rightarrow H_{DR}^p(M)$$

について、 $\iota_a^* \circ \pi^* = \text{id}_{H_{DR}^p(M)}$ ,  $\pi^* \iota_a^* = \text{id}_{H_{DR}^p([0, 1] \times M)}$  を示せ。

この結果、 $\iota_0^* = (\pi^*)^{-1} = \iota_1^*$  となる。