２００６年度 幾何学 III　　演習問題　　１２月１２日

復習問題． ベクトル空間 V, W に対し双１次形式 $B: V \times W \longrightarrow \mathbf{R}$ が定義され次を満たすとする。

$$\forall v \in V, v \neq 0 \text{ ならば } \exists w \in W, B(v,w) \neq 0$$

V は有限次元とし、基底を $e_1, \ldots, e_k$ とするとき、$f_1, \ldots, f_k \in W$ で $\bigl(B(e_i, f_j)\bigr)_{i,j=1,\ldots,k}$ が正則行列となるものが存在することを示せ。

問題１． (1) 連結多様体 M 上の微分形式 α が、任意の閉曲線 $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ $(\gamma(0) = \gamma(1))$ に対し、$\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$ を満たすとする。このとき、α は M 上の関数 f の全微分となる $(\alpha = \mathrm{d}f)$ ことを示せ。
(2) 連結多様体 M 上の閉微分１形式 α のコホモロジー類 $[\alpha] \neq 0$ とすると、ある閉曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma \alpha \neq 0$ となることを示せ。
(3) コンパクト連結多様体 M の１次元ドラームコホモロジー群が $H^1_{DR}(M) \cong \mathbf{R}^k$ とする。閉曲線 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ が存在して、閉微分１形式 α が $\displaystyle\int_{\gamma_i} \alpha = 0$ を満たせば、α は M 上の関数 f の全微分となる $(\alpha = \mathrm{d}f)$ ことを示せ。

定義 [標準 n 単体] $\Delta^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 1 \geqq x_1 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq 0\}$

[標準 n 単体上の積分]

$$\int_{\Delta^n} f \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{x_1=0}^{1} \Bigl(\cdots \Bigl(\int_{x_k=0}^{x_{k-1}} \Bigl(\cdots \Bigl(\int_{x_n=0}^{x_{n-1}} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_n\Bigr) \cdots\Bigr) \mathrm{d}x_k\Bigr) \cdots\Bigr) \mathrm{d}x_1$$

問題２． $\displaystyle\int_{\Delta^n} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ を求めよ。

定義 [単体からの微分可能写像 $\sigma : \Delta^n \longrightarrow M$ に沿う積分]
M 上の微分 n 形式 α に対して、σ に沿う積分を $\displaystyle\int_\sigma \alpha = \int_{\Delta^n} \sigma^* \alpha$ で定義する。

[チェイン上の積分]　写像の有限形式和 $\displaystyle\sum_i a_i \sigma_i$ に対して、$\displaystyle\int_{\sum_i a_i \sigma_i} \alpha = \sum_i a_i \int_{\Delta^n} {\sigma_i}^* \alpha$ とおく。

[境界] $k = 0, \ldots, n$ に対して、$\varepsilon_k : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (1, x_1, \ldots, x_{n-1}),\\
&\varepsilon_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_k, x_k, \ldots, x_{n-1}) \quad (0 < k < n),\\
&\varepsilon_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}, 0)
\end{aligned}$$

このとき、$\displaystyle\partial\sigma = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma \circ \varepsilon_k$

問題３. $\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 \mid w \geqq u \geqq v \geqq 0\}$ 上の関数 $f(u,v)$ の積分について次が成立する。

$$\int_{\{w\geqq u\geqq v\geqq 0\}} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{u=0}^{w}\big(\int_{v=0}^{u} f(u,v)\mathrm{d}v\big)\mathrm{d}u = \int_{v=0}^{w}\big(\int_{u=v}^{w} f(u,v)\mathrm{d}u\big)\mathrm{d}v$$

これを使って、$\alpha_k = (-1)^{k-1} f_k \mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k-1}\wedge\mathrm{d}x_{k+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ に対し、

$$\int_{\Delta^n}\mathrm{d}\alpha_k = \int_{(-1)^{k-1}\varepsilon_{k-1}+(-1)^k\varepsilon_k}\alpha_k = \int_{\sum_{i=0}^n(-1)^i\varepsilon_i}\alpha_k$$

を示せ。

このことから、$\sigma:\Delta^n\longrightarrow M$, M 上の微分 $n-1$ 形式 α に対するストークスの定理 $\displaystyle\int_\sigma \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial\sigma}\alpha$ が従う。

ヒント： $F(x_1,\cdots,x_{k+1}) = \displaystyle\int_{x_{k+2}=0}^{x_{k+1}}\cdots\int_{x_n=0}^{x_{n-1}}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_{k+2}$ について、

$$\int_{x_k=0}^{x_{k-1}}\big(\int_{x_{k+1}=0}^{x_k}F(x_1,\cdots,x_{k+1})\mathrm{d}x_{k+1}\big)\mathrm{d}x_k = \int_{x_{k+1}=0}^{x_{k-1}}\big(\int_{x_k=x_{k+1}}^{x_{k-1}}F(x_1,\cdots,x_{k+1})\mathrm{d}x_k\big)\mathrm{d}x_{k+1}$$

定義 [有限単体複体] $\mathbf{R}^N$ の基底を $\{e_1,\cdots,e_N\}$ とする。頂点 $\{e_{i_0},\cdots,e_{i_k}\}$ $(e_{i_0}<\cdots<e_{i_k})$ を頂点とする k 次元単体（これらの点の凸包）を $\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ で表す。すなわち、

$$\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle = \{\sum_{\ell=0}^k t_{i_\ell}e_{i_\ell}\big| t_{i_\ell}\geq 0, \sum_{\ell=0}^k t_{i_\ell}=1\}$$

この単体の点 $\displaystyle\sum_{\ell=0}^k t_{i_\ell}e_{i_\ell}$ に対し、$(t_{i_0},\ldots,t_{i_k})$ をその点の重心座標という。

[有限単体複体] 有限単体複体 K とはこれらの単体からなる有限集合で、一つの k 次元単体 $\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ をふくめば、その面となる $k-1$ 次元単体 $\langle e_{i_0}\cdots, e_{i_{\ell-1}}e_{i_{\ell+1}}\cdots, e_{i_k}\rangle$ $(0\leq\ell\leq k)$ を含む（従って、次元の低い面をすべて含む）ものである。$|K|$ で K に属する単体の和集合を表す。$|K|$ の点は重心座標で表されている。

問題４. $\sigma:\Delta^k\longrightarrow\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ を

$$\sigma(x_1,\ldots,x_k) = (1-x_1)e_{i_0}+(x_1-x_2)e_{i_1}+\cdots+(x_{k-1}-x_k)e_{i_{k-1}}+x_ke_{i_k}$$

で定義する。$\mathbf{R}^N$ 上の微分 k 形式

$$\omega_{i_0\cdots i_k} = k!\sum_{\ell=0}^k(-1)^\ell t_{i_\ell}\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_k}$$

に対し、$\displaystyle\int_\sigma\omega_{i_0\cdots i_k}$ を求めよ。