２００５年度 幾何学 III　　演習問題　　１１月８日

定義 [多様体上の微分 p 形式] M 上の p 形式 α とは、$\{(U_i, \varphi_i)\}$ を座標近傍系としたとき、各 $\varphi(U_i)$ 上の C^∞ 級微分 p 形式 $\alpha^{(i)}$ で次を満たす物のことである。ここで、$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1}$ である。

$$\alpha^{(j)}|\varphi_j(U_i \cap U_j) = \varphi_{ij}^* \alpha^{(i)}$$

定義 [多様体上の微分 p 形式] M の各点 x に余接空間 T_x^*M の p 次外積の空間 $\bigwedge^p T_x^*M$ の元を各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ 上で $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ の係数 $f_{i_1 \cdots i_p}$ が C^∞ 級関数となるように対応させる対応を、M 上の C^∞ 級微分 p 形式と呼ぶ。

定義 [ドラーム・コホモロジー]

$$H_{DR}^p(M) = \ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))/\mathrm{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$$

$\ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))$ の元を閉 p 形式、$\mathrm{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$ の元を完全 p 形式と呼ぶ。

問題１. $F : M \longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。引き戻し $F^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$ は、準同型写像 $F^* : H_{DR}^p(N) \longrightarrow H_{DR}^p(M)$ を引き起こすことを示せ。

問題２.
(1) 多様体 M 上の閉 p 形式と閉 q 形式の外積は、閉 $p+q$ 形式であることを示せ。
(2) 外積 $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$ はドラーム・コホモロジー群の上の外積 $\wedge : H_{DR}^p(M) \times H_{DR}^q(M) \longrightarrow H_{DR}^{p+q}(M)$ を引き起こすことを示せ。

問題３. 多様体 M に対し、$[0,1] \times M$ 上の微分形式を考える。座標近傍 (U, φ) に対し、$I_a^{(U)} : \Omega^p([0,1] \times \varphi(U)) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1] \times \varphi(U))$ を１１月１日の演習問題と同様に定義する。 $\underline{I_a^{(U)} \text{ は } I_a : \Omega^p([0,1] \times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1] \times M) \text{ を定義することを示せ。}}$
すなわち、得られる $[0,1] \times M$ 上の $p-1$ 形式の表示が座標近傍を取り替えと矛盾しないことを示せ。
この結果、１１月１日の問題２により、この I_a は $\mathrm{d}I_a(\alpha) + I_a(\mathrm{d}\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^* \alpha)$ を満たす。ただし、写像 $\pi : [0,1] \times M \longrightarrow M$ は $\pi(x_0, x) = x$ で定義し、$a \in [0,1]$ に対し、写像 $\iota_a : M \longrightarrow [0,1] \times M$ は $\iota_a(x) = (a, x)$ と定義する。

問題４. $\pi : [0,1] \times M \longrightarrow M$ および $\iota_a : M \longrightarrow [0,1] \times M$ がドラーム・コホモロジー群に誘導する写像

$$\pi^* : H_{DR}^p(M) \longrightarrow H_{DR}^p([0,1] \times M), \quad {\iota_a}^* : H_{DR}^p([0,1] \times M) \longrightarrow H_{DR}^p(M)$$

について、${\iota_a}^* \circ \pi^* = \mathrm{id}_{H_{DR}^p(M)}$, $\pi^* {\iota_a}^* = \mathrm{id}_{H_{DR}^p([0,1] \times M)}$ を示せ。
この結果、${\iota_0}^* = (\pi^*)^{-1} = {\iota_1}^*$ となる。