２００５年度 幾何学 III　　演習問題　　１月２４日

問題１． ２次元単位球面 S^2 に対してステレオグラフ射影 $\pi_N : S^2 \setminus \{p_N\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\pi_S : S^2 \setminus \{p_S\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を考える。

$$\pi_N(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2) = (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3})$$
$$\pi_S(x_1, x_2, x_3) = (u_1, u_2) = (\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3})$$

(1) $\mathbf{R}^2$ 上の多項式係数のベクトル場の $\xi = P(v_1, v_2)\dfrac{\partial}{\partial v_1} + Q(v_1, v_2)\dfrac{\partial}{\partial v_2}$ について $({\pi_N}^{-1})_*\xi$ が S^2 上の微分可能ベクトル場に拡張するためには P, Q の次数は２次以下であることを示せ。
(2) $\mathbf{R}^2$ 上の多項式係数の微分１形式 $\alpha = P(v_1, v_2)\mathrm{d}v_1 + Q(v_1, v_2)\mathrm{d}v_2$ について ${\pi_N}^*\alpha$ は S^2 上の微分可能微分形式に拡張しないことを示せ。
ヒント：(1) $\pi_{S*}({\pi_N}^{-1})_*\xi$ を書き下し、原点に拡張するかどうか考える。(2) ${\pi_S}^{-1*}(\pi_N)^*\alpha$ を書き下し、原点に拡張するかどうか考える。

定義 [リー微分] ベクトル場 ξ がフロー φ_t を生成しているとする。微分 p 形式 α に対し、微分 p 形式 $(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha$ は、α の ξ によるリー微分と呼ばれ、$L_\xi\alpha$ と書かれる。

問題２． (1) 微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β, ベクトル場 ξ に対して、
$L_\xi(\alpha \wedge \beta) = (L_\xi\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_\xi\beta)$ を示せ。
(2) 微分 p 形式 α, ベクトル場 ξ に対して、$\mathrm{d}(L_\xi\alpha) = L_\xi\mathrm{d}\alpha$ を示せ。

問題３． 微分 p 形式 α, ベクトル場 ξ, η に対して $(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)\alpha = L_{[\xi,\eta]}\alpha$ が成立することを次の順で示せ。
(1) 微分０形式、微分１形式に対して示す。(2) 微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β に対して成立していることを仮定して、外積 $\alpha \wedge \beta$ に対して成立することを示す（問題２ (1) を使う）。
(3) 題意を示す。

問題４． 内部積が多様体上で定義されることは以下により示される。
(1) 微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β の外積 $\alpha \wedge \beta$ に対し, $i_\xi(\alpha \wedge \beta) = (i_\xi\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_\xi\beta)$ が成立することを示せ。
(2) $F : U \longrightarrow V$ をユークリッド空間の開集合 U, V の間の微分同相写像とする。V 上の微分１形式 α, V 上のベクトル場 ξ に対し、$F^*(i_\xi\alpha) = i_{{F^{-1}}_*\xi}F^*\alpha$ を示せ。
(3) $F : U \longrightarrow V$ をユークリッド空間の開集合 U, V の間の微分同相写像とする。V 上の微分 p 形式 α, V 上のベクトル場 ξ に対し、$F^*(i_\xi\alpha) = i_{{F^{-1}}_*\xi}F^*\alpha$ を示せ（問題３と同様の議論で (1) を使う）。

問題５． 微分 p 形式 α, ベクトル場 ξ, η に対して $i_\xi L_\eta\alpha - L_\eta i_\xi\alpha = i_{[\xi,\eta]}\alpha$ が成立することを問題３と同様に示せ。

問題６． $\mathbf{R}^3$ 上の微分１形式 $\alpha = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2 + x_3\mathrm{d}x_3$, 微分２形式 $\omega = x_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, 微分３形式 $\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ を考える。

行列 $A=(A_{ij})_{i,j=1,2,3}$ が定める、線形写像 $A:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ について次に答えよ。
(1) $A^*\alpha=\alpha$ となるための行列 A の条件を求めよ。
(2) $A^*\omega=\omega$ となるための行列 A の条件を求めよ。
(3) $A^*\varOmega=\varOmega$ となるための行列 A の条件を求めよ。

問題７． 問題６の微分形式 α, ω, $\varOmega$, $\mathbf{R}^3$ 上の線形ベクトル場 $\xi=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ を考える。
(1) $L_\xi\alpha=0$ となるための ξ の条件を求めよ。
(2) $L_\xi\omega=0$ となるための ξ の条件を求めよ。
(3) $L_\xi\varOmega=0$ となるための ξ の条件を求めよ。

定義 [微分形式のベクトル場における値] 微分 p 形式 α, ベクトル場 $\xi_1,\dots,\xi_p$ に対し、
$\alpha(\xi_1,\dots,\xi_p)=i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_1}\alpha$ と定義する（関数 f に対し $i_\xi \mathrm{d}f=\xi(f)$ である）。
注意：$\alpha(\xi_1,\dots,\xi_p)=\dfrac{1}{p!}i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_1}\alpha$ とする定義もある。

問題８． 問題５を用いて、次を示せ（これらを外微分、リー微分の定義とすることもある）。
(1) 微分１形式 α に対し、$(\mathrm{d}\alpha)(\xi_1,\xi_2)=\xi_1(\alpha(\xi_2))-\xi_2(\alpha(\xi_1))-\alpha([\xi_1,\xi_2])$.
(2) 微分 p 形式 α に対し、

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\alpha)(\xi_1,\dots,\xi_{p+1})=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\xi_i(\alpha(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_{p+1}))\\&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([\xi_i,\xi_j],\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{p+1})\end{aligned}$$

(3) $(L_\xi\alpha)(\xi_1,\dots,\xi_p)=\xi\alpha(\xi_1,\dots,\xi_p)-\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\alpha(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},[\xi,\xi_i],\xi_{i+1},\dots,\xi_p)$

定義 [リー群] 群 G が多様体の構造をもち、群演算 $G\times G\longrightarrow G$ が C^∞ 級写像となるとき、G はリー群と呼ばれる（このとき、陰関数定理を用いると、逆元をとる演算 $G\longrightarrow G$ は C^∞ 級写像となることがわかる）。G の元 g による左移動 $L_g:G\longrightarrow G$ は $L_g(h)=gh$ で定義される。左移動で不変なベクトル場、微分形式を左不変ベクトル場、微分形式とよぶ。
これらは単位元 $\mathbf{1}$ における値で定まる。左不変ベクトル場 ξ,η のブラケット積 $[\xi,\eta]$ は、左不変ベクトル場となる。また、左不変形式 α の外微分 $\mathrm{d}\alpha$ は左不変形式となる。
行列で表されるリー群上の左不変ベクトル場 A で生成されるフローは $\varphi_t^A(B)=Be^{tA}$ と書かれる。

問題９． (1) $SO(3)$ のリー代数 $\mathfrak{so}(3)\cong T_{\mathbf{1}}SO(3)$ は 3×3 交代行列 $({}^tA+A=0)$ で表される。基底 $e_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ に対し、$[e_i,e_j]$ を計算せよ。左不変微分１形式の基底を双対基底 e_1^*, e_2^*, e_3^* とするとき、$\mathrm{d}e_i^*$ を求めよ。
(2) $SL(2;\mathbf{R})$ のリー代数 $\mathfrak{sl}(2;\mathbf{R})\cong T_{\mathbf{1}}SL(2;\mathbf{R})$ はトレースが０の 2×2 行列 $(\mathrm{Tr}A=0)$ で表される。基底 $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ に対し、これらのブラケット積を計算せよ。左不変微分１形式の基底を双対基底 H^*, S^*, U^* とするとき、それらの外微分を求めよ。