２０１０年度幾何学特別演習 II　問題　　１２月８日

n 次元有限胞体複体は、次のように定義される。
0 次元胞体複体とは、各点を開集合とする（離散位相を持つ）有限集合のことである。$n-1$ 次元胞体複体が定義されているとする。n 次元胞体複体 $X^{(n)}$ は、$k-1$ 次元胞体複体 $X^{(n-1)}$, および有限個の n 次元円板 $D_1^n, \ldots, D_{k(n)}^n$ の直和と、写像 $\varphi: \coprod_{i=1}^{k(n)} S_i^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$ により、$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_\varphi (\coprod_{i=1}^{k(n)} D_i^n)$ として与えられるものである。$X^{(n)}$ 内の $\mathrm{Int}(D_i^n)$ の像を e_i^n と書き、n（次元）胞体と呼ぶ。

位相空間 X の有限胞体複体としての構造を与える（X を胞体分割する）ためには、連続写像 $\iota_i^n : D_i^n \longrightarrow X$ $(i = 1, \ldots, k(n))$ で、$\iota_i^n|\mathrm{Int}(D_i^n)$ は像への同相写像であり、$\iota_i^n(\mathrm{Int}(D_i^n)) = e_i^n \subset X$ とするとき、$\iota_i^n(\partial D_i^n) \subset \bigcup_{m<n} \bigcup_{i=1}^{k(m)} e_i^m$ となるものを構成すればよい。

演習問題８－１． (1) $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ について,

$$
\begin{aligned}
&e_1^0 = (1, 0, 0), \quad e_2^0 = (-1, 0, 0) \\
&(e_1^0 \cup e_2^0) \cup (e_1^1 \cup e_2^1) = S^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 = 0\} \\
&S^2 = (e_1^0 \cup e_2^0) \cup (e_1^1 \cup e_2^1) \cup (e_1^2 \cup e_2^2)
\end{aligned}
$$

であり、接着写像が $A(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ で定義される $A: S^2 \longrightarrow S^2$ で不変であるような胞体複体の構造（胞体分割）を定めよ。

(2) (1) でとった胞体複体のチェイン複体を記述し、ホモロジー群を求めよ。

(3) $\mathbf{R}P^2 = S^2/A$ の胞体分割を定めよ。

(4) (3) でとった胞体複体のチェイン複体を記述し、ホモロジー群を求めよ。

演習問題８－２． (1) ２次元トーラス T^2 の胞体分割を定めよ。$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ としても $T^2 = \{((2 + \cos\varphi)\cos\theta, (2 + \cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi) \mid \varphi, \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}\}$ としても良い。

(2) ２次元トーラス T^2 のホモロジー群を求めよ。

(3) クライン・ボトル K の胞体分割を定めよ。

(4) クライン・ボトル K のホモロジー群を求めよ。

演習問題８－３． n 次元有限胞体複体

$$X = X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)},$$
$$X^{(\ell)} = X^{(\ell-1)} \cup_{\varphi_X^\ell} (D_1^\ell \sqcup \cdots \sqcup D_{k(\ell)}^\ell),\ (\ell = 1,\ \ldots, n),$$

について、$H_*(X)$ が、$C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \cong \mathbf{Z}^{k(\ell)}$, $\partial : H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}) \xrightarrow{j_*} H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}, X^{(\ell-2)})$ で定められるチェイン複体のホモロジー群 $H_*(C_*(X))$ に等しい。このことから、$\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \mathrm{rank}(H_\ell(X)) = \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell k(\ell)$ を示せ。X のオイラー・ポアンカレ標数と呼び、しばしば $\chi(X)$ と書く。

問題８－４． 演習問題１と同様の n 次元球面の胞体分割で、$0 \leqq k \leqq n$ に対して k 次元の胞体を２個持つものを構成せよ。
これにより、$\mathbf{R}P^n$ の胞体分割を与え，$\mathbf{R}P^n$ のホモロジー群を計算せよ。

問題８－５． $\mathbf{C}P^2 = (\mathbf{C}^3 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ の胞体分割 $e^0 \cup e^2 \cup e^4$ を定めよ。このときの接着写像 $\partial D^4 \longrightarrow S^2 = e^0 \cup e^2$ を表せ。$\mathbf{C}P^2$ のホモロジー群を求めよ。
ヒント：$e^4 = \{[z_1 : z_2 : 1] \in \mathbf{C}P^2\} \cong \dfrac{(z_1, z_2)}{\sqrt{1 + |z_1|^2 + |z_2|^2}} \subset D^4$. $(w_1, w_2) \in S^3 \subset \mathbf{C}^2$ に対し、$\mathrm{Int}(D^4)$ から近づく点を取り、$\mathbf{C}P^2$ での極限を計算する。